1. Dire se il polinomio X^3-2 è irriducibile o meno negli anelli $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Z}_7[X]$, $\mathbf{Z}_{31}[X]$.
2. Fattorizzare il polinomio $X^6 - 1$ in $\mathbf{C}[X]$, $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Z}_3[X]$, $\mathbf{Z}_5[X]$.
3. Il polinomio *reciproco* di $f = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbf{Q}[X]$ (con a_0, a_n diversi da 0) è il polinomio $f^* = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} X^j \in \mathbf{Q}[X]$. Dimostare che f è irriducibile se e solo se f^* è irriducibile.
4. Fattorizzare i seguenti elementi dell'anello R in fattori irriducibili di R.
   (a) $X^2 - Y^2$ con $R = \mathbf{Q}[X, Y]$;
   (b) $X^3 + 4X^2 + 9X + 6$ con $R = \mathbf{Z}[X]$;
   (c) $3X^4 + X - 1$ con $R = \mathbf{Q}[X]$;
   (d) 247 con $R = \mathbf{Z}$.
5. Decidere se il polinomio $X^5 + X^3 + 1$ è irriducibile o meno negli anelli $\mathbf{Z}_2[X]$, $\mathbf{Z}_3[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ e $\mathbf{R}[X]$.
6. (Elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$)
   (a) Dimostrare che $\mathbf{Z}[i]^* = \{\pm 1, \pm i\}$.
   (b) Dimostrare che $i + 1$ è un elemento irriducibile di $\mathbf{Z}[i]$.
   (c) Sia $p \equiv 3 \pmod 4$ un numero primo. Dimostrare che p è un elemento irriducibile di $\mathbf{Z}[i]$.
   (d) Si sa che per ogni primo $p \equiv 1 \pmod 4$ esistono $a, b \in \mathbf{Z}$ tali che $p = a^2 + b^2$. Dimostrare che $\pi = a + bi$ e $\overline{\pi} = a - bi$ sono elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$.
   (e) Dimostrare che un elemento irriducibile di $\mathbf{Z}[i]$ necessariamente divide qualche numero primo. Dedurne che, a meno di elementi invertibili, gli elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$ sono quelli che appaiono nelle parti (b), (c) e (d).
7. Fattorizzare i seguenti elementi dell'anello R in fattori irriducibili di R.
   (a) $X^3 - Y^3$ con $R = \mathbf{Q}[X, Y]$;
   (b) $X^3 - X^2 - 8X + 6$ con $R = \mathbf{Z}[X]$;
   (c) $X^4 - X^2 + 4X + 3$ con $R = \mathbf{Q}[X]$;
   (d) $2i - 9$ con $R = \mathbf{Z}[i]$.
8. Sia $f \in \mathbf{Z}[X]$ un polinomio monico.
   (a) Se $\alpha \in \mathbf{Q}$ è uno zero di f, allora $\alpha \in \mathbf{Z}$.
   (b) Supponiamo che $f(2) = 13$. Dimostrare che f ha al più tre zeri distinti in $\mathbf{Q}$.
   (c) Esibire un polinomio f con tre zeri razionali distinti e che soddisfa $f(2) = 13$.
9. Sia $\mathbf{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss.
   (a) Fattorizzare gli elementi $5 + i$ e $239 + i$ come prodotto di elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$.
   (b) Dedurre la formula classica che John Machin ha usato nel 1706 per calcolare a mano i primi 100 decimali di π:
$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}, \qquad \text{con} \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$