1. Sia R un anello commutativo. Dimostrare che (0) è ideale primo di R se e solo se R è un dominio.

2. Dimostrare che gli ideali primi non nulli di $\mathbf{Z}$ sono massimali.

3. Dimostrare che ogni dominio finito è un campo. Dedurre che gli ideali primi non nulli di $\mathbf{Z}[i]$ sono massimali.

4. Sia p un primo e sia I_p l'ideale di $\mathbf{Z}[X]$ generato da X^2+1 e da p. Per $p=2,3$ e 5 decidere se I_p è primo, massimale o nessuno dei due.

5. Sia R un anello e sia $I \subset R$ un ideale. Dimostrare che ogni ideale di R/I ha la forma J/I per un ideale J di R che contiene I. Far vedere che l'ideale J è unico.

6. Sia R un anello. Sia $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}[X],R)$ l'insieme degli omomorfismi di anelli da $\mathbf{Z}[X]$ in R. Dimostrare che la mappa $\phi : \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}[X],R) \longrightarrow R$ data da $\phi(g)=g(X)$ (per $g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}[X],R)$), è una biiezione.

7. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi.
   (a) Dimostrare che $IJ = I \cap J$;
   (b) (Teorema cinese del resto) Dimostrare che la mappa naturale
   $$R/IJ \longrightarrow R/I \times R/J$$
   è un isomorfismo di anelli.
   (c) Generalizzare la parte (b) a n ideali $I_1, \ldots, I_n$ coprimi a due a due.

8. Sia R un anello commutativo e sia $e \in R$ un elemente *idempotente*. Cioè, si ha che $e^2 = e$.
   (a) Dimostrare: anche $1-e$ è idempotente.
   (b) Dimostrare: la mappa naturale $R \longrightarrow R/(e) \times R/(1-e)$ è un isomorfismo di anelli.
   (c) Determinare gli elementi idempotenti di $\mathbf{Z}_{100}$.

9. (a) Sia R un dominio e siano x, y due elementi di R can la proprietà che gli ideali (x) e (y) sono uguali. Dimostrare che esiste $u \in R^*$ con $ux = y$.
   (b) Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato da $5X$ e X^2 e sia $R = \mathbf{Z}[X]/I$. Dimostrare che R non è un dominio.
   (c) Indichiamo la mappa canonica $\mathbf{Z}[X] \longrightarrow R$ con $f \mapsto \overline{f}$. Dimostrare che gli ideali di R generati dagli elementi $\overline{X}$ e $\overline{2X}$ sono uguali, ma che *non* esiste nessuna unità $u \in R^*$ tale che $\overline{2X} = u\,\overline{X}$.

10. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi, vale a dire $I+J=R$. Dimostrare che per ogni $m \geq 1$ si ha che $I^m + J^m = R$.