1. Sia G un gruppo finito.
   (a) Dimostrare che se G ha solo due classi di coniugio, allora $G \cong \mathbf{Z}_2$.
   (b) Dimostrare che se G ha tre classi di coniugio, allora $G \cong \mathbf{Z}_3$ oppure $G \cong S_3$.

2. Sia G un gruppo finito e sia $P \subset G$ un suo p-sottogruppo di Sylow.
   (a) Il gruppo P agisce sull'insieme delle sue classi laterali sinistre per moltiplicazione. Dimostrare che il numero di punti fissi non è congruo a 0 (mod p).
   (b) Se $\#P = p$ e p è il più piccolo divisore primo di $\#G$, dimostrare che il centralizzante di P è uguale al normalizzante di P.

3. (L'omomorfismo transfer) Sia G un gruppo finito e sia $H \subset G$ un sottogruppo di G. Siano x_iH, $(i \in I)$ le classi laterali sinistre di H.
   (a) Sia $g \in G$. Dimostrare che per ogni $i \in I$ esistono unici $j \in I$ e $h_i \in H$ tali che $gx_i = x_j h_i$.
   (b) Dimostrare che il prodotto $\prod_{i \in I} h_i$ è un elemento ben definito di $H/[H,H]$ che dipende solo da g e non dalla scelta dei rappresentanti x_i.
   (c) Dimostrare che la mappa $G \longrightarrow H/[H,H]$, che manda g in $\prod_{i \in I} h_i$ è un omomorfismo ben definito.

4.*Sia G un gruppo finito. Supponiamo che $\#G = pm$ dove p è il più piccolo divisore primo di $\#G$ ed m non è divisibile per p. Dimostrare che G ammette un sottogruppo normale di indice p.
(Sugg: sia P un p-sottogruppo di Sylow di G; dimostrare che il transfer $G \longrightarrow P$ non è banale; scegliere rappresentanti x_i in modo che $\{x_i : i \in I\}$ sia unione di P-orbite)

Nei seguenti tre esercizi, si usa la seguente notazione. Sia p un primo, sia $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$ e siano B, U e $\overline{U}$ i sottogruppi di G dati da

$$B = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbf{Z}_p,\ ad = 1\},\ U = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbf{Z}_p\},\ \overline{U} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbf{Z}_p\}.$$

5. (a) Dimostrare che U è un sottogruppo normale di B.
   (b) Dimostrare che B è massimale in G. In altre parole, se H è un sottogruppo di G che contiene B, allora $H = B$ oppure $H = G$. (Sugg: B consiste nelle matrici di G che fissano il punto $(1:0)$ della retta proiettiva $\mathbf{P}_1(\mathbf{Z}_p)$).

6. (a) Dimostrare che U e $\overline{U}$ insieme, generano G.
   (b) Dimostare che per $p \geq 5$ si ha che $[G,G] = G$. (Sugg: calcolare il commutatore $[\sigma, \tau]$ con $\tau \in G$ diagonale e $\sigma \in U$ e $\overline{U}$; usare la parte (a))

7. Sia N un sottogruppo normale di G.
   (a) Se $N \subset B$, dimostrare che $N \subset \{\pm \mathrm{id}\}$. (Sugg: $N \subset gBg^{-1}$ per ogni $g \in G$)
   (b) Se $N \not\subset B$, dimostrare che G/N è abeliano. (Sugg: per l'esercizio 5 si ha che $G = NB$; dimostrare che $\overline{U} \subset NU$ e dedurre dall'esercizio 6 (a) che $G = NU$.)
   (c) Dimostrare che per $p \geq 5$ il gruppo $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}_p)$ è semplice. (Sugg: usare (a), (b) e l'esercizio precedente)