1. Un *cubo olandese* è un cubo con faccie di colore rosso, bianco o blu. Poichè ogni faccia può avere uno qualunque dei tre colori, ci sono a priori $3^6 = 729$ cubi possibili. Però, tanti di questi cubi sono "lo stesso cubo" nel senso che possono essere portati uno nell'altro mediante una opportuna rotazione. Per esempio, da questo punto di vista, tutti i cubi con cinque faccie rosse e una faccia bianca sono lo stesso cubo.

   Quanti cubi olandesi essenzialmente diversi ci sono? (Sugg. il gruppo delle rotazioni dello spazio che preservano un cubo è isomorfo al gruppo simmetrico S_4).

2. Un *tetraedro arcobaleno* è un tetraedro regolare con faccie di colore $C_1, C_2, \ldots$ oppure C_M. Quanti tetraedri arcobaleno *essenzialmente diversi* ci sono? (Sugg. il gruppo delle rotazioni dello spazio che preservano un tetraedro regolare è isomorfo al gruppo alternante A_4).

3. Siano $K \subset H \subset G$ gruppi. Dimostrare che $[G:K] = [G:H][H:K]$.

4. Siano H ed N sottogruppi di un gruppo G. Supponiamo che H normalizzi N.
   (a) Dimostrare che $HN = \{hn : h \in H \text{ e } n \in N\}$ è un sottogruppo di G.
   (b) Dimostrare che N è un sottogruppo normale di HN
   (c) Dimostrare che l'inclusione $H \subset HN$ induce un isomorfismo di gruppi

$$H/(H \cap N) \cong HN/N.$$

5. Sia G un gruppo e siano N_1, N_2 due sottogruppi normali di G con la proprietà $N_1 \cap N_2 = \{e\}$.
   (a) Dimostrare che N_1 e N_2 commutano.
   (b) Dimostrare che il sottogruppo $N_1N_2 = \{xy : x \in N_1 \text{ e } y \in N_2\}$ è isomorfo a $N_1 \times N_2$.

6. Sia G un gruppo. Dimostrare che un sottogruppo normale di G è unione disgiunta di classi di coniugio di G.

7. Determinare le classi di coniugio del gruppo alterno A_4. Verificare che la cardinalità di ogni classe divide $\#A_4 = 12$.

8. Sia p un numero primo.
   (a) Dimostrare che il centro di un gruppo finito di ordine una potenza di p non è banale.
   (b) Dimostrare che ogni gruppo di ordine p^2 è abeliano.

9. Sia $H \subset G$ un sottogruppo con $[G:H] = n$. Dimostrare che H contiene un sottogruppo N, normale in G, con la proprietà che $[G:N]$ divide $n!$.

10. Sia $n \geq 2$. Sia $H \subset S_n$ un sottogruppo transitivo. In altre parole, l'azione di H su $\{1, 2, \ldots, n\}$ ha un'unica orbita.
    (a) Dimostrare che n divide $\#H$.
    (b) Dimostrare che H contiene un elemento senza punti fissi. (Sugg. usare la formula di Burnside.)

11. Sia p un numero primo.
    (a) Esibire un p-sottogruppo di Sylow di $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.
    (b) Sia $n \geq 1$. Determinare la cardinalità del gruppo $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$.
    (c) Sia $n \geq 1$. Esibire un p-sottogruppo di Sylow di $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$.