

1. Sia k un campo e sia $f \in k[X]$ un polinomio di grado n . Dimostrare che il grado del campo di spezzamento di f su k divide $n!$.
2. Determinare il grado del campo di spezzamento dei seguenti polinomi su \mathbf{Q} :
 - (a) $X^2 - 841$;
 - (b) $X^3 - 1$;
 - (c) $X^3 - 3$;
 - (d) $X^4 - 2$;
 - (e) $X^{10} - 1$;
 - (f) $X^3 - X^2 - 2X + 1$, (Sugg. $\alpha = 2 \cos(\pi/7)$ è uno zero del polinomio.)
3. Determinare il grado del campo di spezzamento del polinomio $X^4 - 2$ sui campi

(a) \mathbf{C} ,	(d) $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,	(g) \mathbf{Z}_2 ,
(b) \mathbf{R} ,	(e) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$,	(h) \mathbf{Z}_3 ,
(c) \mathbf{Q} ,	(f) $\mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})$.	(i) \mathbf{Z}_5 .
5. Sia p un primo e sia k un campo di caratteristica p . Sia $a \in k$ e sia f il polinomio “di Artin-Schreier” $X^p - X - a \in k[X]$. Dimostrare le seguenti affermazioni
 - (a) per ogni $\lambda \in \mathbf{Z}_p$ si ha che $f(X + \lambda) = f(X)$.
 - (b) per $\lambda \in \mathbf{Z}_p$ e $\alpha \in \bar{k}$ uno zero di f anche $\alpha + \lambda$ è uno zero di f .
 - (c) Se f ha uno zero in k , allora f è prodotto di fattori lineari in $k[X]$.
 - (d) Se f non ha zeri in k , allora f è irriducibile e il suo campo di spezzamento ha grado p su k . (Sugg. Per un fattore irriducibile g di f considerare il gruppo additivo $H = \{\lambda \in \mathbf{Z}_p : g(X + \lambda) = g(X)\}$).
4. Sia R un anello commutativo. Il derivato f' di un polinomio $f = a_n X^n + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in R[X]$ è definito da

$$f' = na_n X^{n-1} + \dots + 2a_2 X + a_1.$$

Dimostrare

$$\begin{aligned} (f + g)' &= f' + g', & \text{per ogni } f, g \in R[X]; \\ (fg)' &= fg' + f'g, & \text{per ogni } f, g \in R[X]; \\ f' &= 0, & \text{per ogni } f \text{ costante.} \end{aligned}$$

5. Sia R un anello commutativo, sia $f \in R[X]$ e sia $\alpha \in R$ uno zero di f . Dimostrare che $(X - \alpha)^2$ divide f se e solo se $f'(\alpha) = 0$. In altre parole, lo zero α è uno zero doppio se e solo se $f'(\alpha) = 0$.
6. Sia k un campo e sia $f \in k[X]$ un polinomio.
 - (a) Supponiamo che $\text{car}(k) = 0$. Dimostrare che $f' = 0$ se e solo se f è costante.
 - (b) Supponiamo che $\text{car}(k) = p$ sia primo. Dimostrare che $f' = 0$ se e solo se $f(X) = g(X^p)$ per qualche polinomio $g \in k[X]$.
7. Sia p primo e sia $k = \mathbf{F}_p(T)$ il campo delle funzioni razionali in T .
 - (a) Dimostrare che il polinomio $X^p - T \in k[X]$ è irriducibile.
 - (b) Sia $\alpha \in \bar{k}$ uno zero di $X^p - T$. Dimostrare che $X^p - T = (X - \alpha)^p$ in $k(\alpha)[X]$. Dimostrare che il campo di spezzamento di f su k è $k(\alpha)$.
 - (c) Dimostrare che $k(\alpha)$ è isomorfo ad un campo di funzioni razionali.