1. Calcolare i gradi su $\mathbf{Q}$ dei seguenti sottocampi di $\mathbf{C}$:
   (a) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$; (b) $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, i)$; (c) $\mathbf{Q}(\exp(\frac{2\pi i}{n}))$, per n un numero intero.

2. (a) Esibire $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ trascendenti, tali che la somma $\alpha + \beta$ sia algebrica.
   (b) Esibire $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ trascendenti, tali che il prodotto $\alpha\beta$ sia algebrico.
   (c) Esistono $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ trascendenti, tali che sia $\alpha + \beta$ che $\alpha\beta$ siano algebrici?

3. Sia K un campo finito. Dimostrare che $\mathrm{car}(K) = p$ per qualche numero primo p. Dimostrare $\#K$ è una potenza di un numero primo.

4. Dimostrare che i sottocampi $\mathbf{Q}(\pi)$ e $\mathbf{Q}(e)$ di $\mathbf{C}$ sono isomorfi (Sugg. π e e sono numeri trascendenti).

5. Sia $f : K \longrightarrow L$ un omomorfismo di campi. Dimostrare che $\mathrm{car}\, K = \mathrm{car}\, L$.

6. Sia F un campo. Un *automorfismo* di F è un omomorfismo di anelli $F \longrightarrow F$ biettivo.
   (a) Dimostrare che l'insieme degli automorfismi di F formano un gruppo: $\mathrm{Aut}\, F$.
   (b) Sia H un insieme di automorfismi di F. Dimostrare che l'insieme dei "punti fissi" $F^H = \{x \in F : \sigma(x) = x \text{ per ogni } x \in H\}$ è un sottocampo di F.
   (c) Sia K un sottocampo di F. Dimostrare gli automorfismi $\sigma \in \mathrm{Aut}\, F$ che hanno la proprietà che $\sigma(x) = x$ per ogni $x \in K$, formano un sottogruppo di $\mathrm{Aut}\, F$.

7. Sia K un campo e sia $f : K \longrightarrow K$ un automorfismo di campi. Dimostrare che la restrizione di f al sottocampo minimale di K, è l'identità.

8. Dimostrare che non è possibile costruire con riga e compasso un angolo di 1 grado.

9. Sia $K \subset L$ un'estensione di grado $[L : K]$ dispari. Sia $\alpha \in L$. Dimostrare che $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

10. Sia $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}} \in \mathbf{C}$.
    (a) Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di ζ.
    (b) Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di $\zeta + \zeta^{-1}$ (Sugg. il polinomio ha grado 3).
    (c) Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di $\eta = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ (Sugg. calcolare $\eta + \eta'$ e $\eta\eta'$ dove $\eta' = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$).

11. Dimostrare che il campo $\overline{\mathbf{Q}}$ dei numeri algebrici in $\mathbf{C}$ è numerabile. Dimostrare che il grado $[\overline{\mathbf{Q}} : \mathbf{Q}]$ è infinito.

12. Sia K un campo di caratteristica $p > 0$.
    (a) Dimostrare che $K^p = \{x^p : x \in K\}$ è un sottocampo di K.
    (b) Per $K = \mathbf{Z}_p$ calcolare il grado $[K : K^p]$.
    (c) Stessa domanda per il campo delle funzioni razionali $K = \mathbf{Z}_p(X)$.