1. Sia G un gruppo. Dimostrare che il centro $Z(G)$ e il sottogruppo dei commutatori G' sono sottogruppi caratteristici di G.

3. Sia G un gruppo e sia $\mathrm{Inn}(G)$ il gruppo degli automorfismi interni di G. Dimostrare che $\mathrm{Inn}(G)$ è un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}(G)$.

4. Siano $N \subset H \subset G$ sottogruppi.
   (a) Dimostrare che se H è normale in G ed N è un sottogruppo caratteristico di H, allora N è un sottogruppo normale di G.
   (b) Esibire un esempio dove N è normale in H ed H è normale in G, ma N *non* è normale in G. (Sugg. prendere $G = D_4$)

5. Sia G un gruppo e sia $f : G \longrightarrow G$ la biiezione data da $f(x) = x^{-1}$ per $x \in G$. Dimostrare che G è abeliano se e solo se f è un automorfismo di G.

6. Sia X un insieme con un'azione del gruppo G. Sia $\sigma \in G$, sia $x \in X$ e sia G_x lo stabilizzatore di x. Dimostrare che lo stabilizzatore di $\sigma(x)$ è uguale a $\sigma G_x \sigma^{-1}$.

7. (a) Sia G un gruppo. Dimostrare che due elementi coniugati di G hanno lo stesso ordine. Vale anche il viceversa?
   (b) Determinare le classi di coniugio del gruppo simmetrico S_3.
   (c) Stessa domanda per il gruppo diedrale D_4.
   (d) Dimostrare che se due matrici $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ sono coniugate, allora hanno lo stesso polinomio caratteristico. Vale anche il viceversa?

8. Sia $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ il semipiano superiore. Definiamo

$$\sigma(z) \;=\; \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{per } \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}).$$

   (a) Dimostrare che si tratta di un'azione di $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ su $\mathcal{H}$.
   (b) Dimostrare che l'azione è *transitiva*.
   (c) Determinare lo stabilizzatore di $i \in \mathcal{H}$.

9. Sia G un gruppo finito di ordine $2n$ con n dispari. In questo esercizio dimostriamo che G ammette un sottogruppo di indice 2.
   (a) Per ogni $g \in G$, sia $t_g : G \longrightarrow G$ la *traslazione* per g, cioè si ha che $t_g(x) = gx$ per $x \in G$. Dimostrare che t_g è una permutazione di G.
   (b) Dimostrare che G ha un elemento x di ordine 2 e calcolare il segno della permutazione t_x.
   (c) Dimostrare che $H = \{g \in G : \text{il segno di } t_g \text{ è pari}\}$ è un sottogruppo di indice 2.

10. Sia F un campo e sia G un gruppo. Siano V e V' due F-spazi vettoriali e siano $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ e $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ due rappresentazioni di G. Dimostrare che per ogni mappa G-equivariante $f : V \longrightarrow V'$, l'azione di G preserva il nucleo e l'immagine di f.