

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Determinare il grado del campo di spezzamento su $\mathbf{Q}$ del polinomio $X^6 - 1$. Spiegare la risposta.
2. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi (cioè $I + J = R$). Dimostrare che $IJ = I \cap J$.
3. Quanti punti contiene lo spazio topologico $\text{Spec}(\mathbf{R}[X]/(X^2))$? Spiegare la risposta.
4. Sia R l'anello $\mathbf{F}_5[X]/(X^2 + 1)$. Quante soluzioni dell'equazione $y^2 = 1$ ci sono in R ?
5. Dire se $Y^{2016} + X^2Y - Y - X + 1$ è o meno un elemento irriducibile dell'anello $\mathbf{R}[X, Y]$. Spiegare la risposta.
6. (a) Dimostrare che $X^2 - 3$ e $X^2 - 2$ sono polinomi irriducibili in $\mathbf{F}_5[X]$.
(b) Esibire un isomorfismo fra i campi $\mathbf{F}_5(\sqrt{2})$ e $\mathbf{F}_5(\sqrt{3})$.

Soluzioni.

1. Si ha che $X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$. Gli zeri di $X^6 - 1$ sono potenze di uno zero ζ del polinomio irriducibile $X^2 - X + 1$. Il campo di spezzamento è quindi isomorfo a $\mathbf{Q}(\zeta) \cong \mathbf{Q}[X]/(X^2 - X + 1)$ ed ha grado 2.
2. Questo è l'esercizio 7 del foglio 6.
3. I punti di $\text{Spec}(\mathbf{R}[X]/(X^2))$ sono gli ideali primi dell'anello $\mathbf{R}[X]/(X^2)$. Essi sono le immagini degli ideali primi di $\mathbf{R}[X]$ che contengono X^2 . Visto che $\mathbf{R}[X]$ è un dominio ad ideali principali, si tratta degli ideali primi di $\mathbf{R}[X]$ generati da divisori irriducibili di X^2 . Poichè X è l'unico polinomio irriducibile che divide X^2 , c'è un unico ideale primo che contiene X^2 . Concludiamo che $\text{Spec}(\mathbf{R}[X]/(X^2))$ consiste in un unico punto.
4. In $\mathbf{F}_5[X]$ il polinomio $X^2 + 1$ è uguale a $(X + 2)(X - 2)$. Per il teorema cinese del resto si ha che $R \cong \mathbf{F}_5 \times \mathbf{F}_5$ e quindi $R^* \cong \mathbf{Z}_5^* \times \mathbf{Z}_5^*$. Gli elementi y con $y^2 = 1$ hanno la forma $(\pm 1, \pm 1)$. Ce ne sono quattro. In termini dell'anello R , si tratta degli elementi ± 1 e $\pm 2X$.
5. Il polinomio $Y^{2016} + (X^2 - 1)Y - (X - 1) \in \mathbf{R}[X][Y]$ è di Eisenstein rispetto al elemento primo $X - 1$ dell'anello $\mathbf{R}[X]$ ed è quindi irriducibile.
6. Questo è l'esercizio 4 del foglio 12.