Algebra 2 (Schoof) 1^o esonero 16 novembre 2015, ore 11:15–13:15.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia G un gruppo e sia $f : G \longrightarrow G$ la biiezione data da $f(x) = x^{-1}$ per $x \in G$. Dimostrare che G è abeliano se e solo se f è un automorfismo di G.
2. Il gruppo simmetrico S_3 agisce su se stesso via coniugio. Descrivere le orbite.
3. Sia $H \subset G$ un sottogruppo con $[G : H] = n$. Dimostrare che H contiene un sottogruppo N, normale in G, con la proprietà che $[G : N]$ divide $n!$.
4. Dimostrare che ogni gruppo di cardinalità 175 è abeliano.
5. Sia ϕ l'unico omomorfismo suriettivo da $\mathbf{Z}_4$ ad $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_3)$. Sia B il prodotto semidiretto $\mathbf{Z}_3 \rtimes \mathbf{Z}_4$ associato a ϕ. Calcolare l'ordine dell'elemento $(\overline{1}, \overline{1}) \in B$.
6. Sia $p > 2$ un primo e sia D_p il gruppo diedrale. Determinare la cardinalità di $\mathrm{Aut}(D_p)$.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 5 del foglio 1.
2. Le orbitre sono le classi di coniugio. Ce ne sono tre, vale a dire $\{(1)\}$, $\{(1\,2), (1\,3), (2\,3)\}$ e $\{(1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$.
3. Questo è l'esercizio 9 del foglio 2.
4. Abbiamo che $175 = 5^2 \cdot 7$. Poichè il numero di 7-sottogruppi di Sylow divide 25 ed è congruo ad 1 (mod 7), il gruppo G ammette un unico 7-sottogruppo di Sylow, il quale è normale. Poichè il numero di 5-sottogruppi di Sylow divide 7 ed è congruo ad 1 (mod 5), c'è anche un unico 5-sottogruppo di Sylow, il quale è quindi normale. Ne segue che G è prodotto diretto di un gruppo di ordine 7 e un gruppo di ordine 25. Siccome gruppi di ordine primo o il quadrato di un numero primo, sono abeliani, anche G è abeliano.
5. L'automorfismo $\sigma = \phi(\overline{1})$ è diverso dall'identità ed è quindi dato da $\sigma(\overline{x}) = \overline{-x}$ per ogni $\overline{x} \in \mathbf{Z}_3$. Abbiamo quindi che $(\overline{1}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{1} + \overline{-1}, \overline{2}) = (\overline{0}, \overline{2})$. Poichè $(\overline{0}, \overline{2}) + (\overline{0}, \overline{2}) = (\overline{0}, \overline{0})$, l'ordine di $(\overline{1}, \overline{1})$ è 4.
6. La solita presentazione di D_p è $\langle R, T : R^p = 1,\, T^2 = 1 \text{ e } TRT^{-1} = R^{-1} \rangle$. Per ogni $i \in \mathbf{Z}$ gli elementi della forma R^iT hanno ordine 2. D'altraparte, gli elementi R^j con $j \not\equiv 0 \pmod p$ hanno ordine p. Ogni automorfismo ϕ è determinato da $\phi(R)$ e $\phi(T)$. Siccome p è diverso da 2 e ϕ non cambia l'ordine degli elementi, abbiamo che $\phi(T) = R^iT$ per qualche $0 \leq i < p$ e abbiamo che $\phi(R) = R^j$ per qualche $0 < j < p$. Ci sono quindi al più $p(p-1)$ automorfismi. D'altra parte, per ogni $0 \leq i < p$ e $0 < j < p$ abbiamo che $\phi(TRT^{-1}) = \phi(R^{-1})$. In altre parole, gli elementi R^iT e R^j soddisfano la stessa relazione che soddisfano T ed R. Infatti, si ha che $R^iTR^jT^{-1}R^{-i} = R^{-j}$. Abbiamo quindi che $\#\mathrm{Aut}(D_p) = p(p-1)$.