Algebra 2 (Schoof) — 3^o appello — 11 luglio 2016, ore 10:00-12:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia G un gruppo di 56 elementi. Dimostrare che o G ha un unico 7-sottogruppo di Sylow o G ha un unico 2-sottogruppo di Sylow.
2. Sia H il sottogruppo di $\mathbf{Z}_{43}^*$ generato da $\overline{4}$. Determinare l'ordine dell'elemento $\overline{11}H$ del gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{43}^*/H$.
3. Sia $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ il gruppo dei quaternioni e sia S_4 il gruppo simmetrico su quattro simboli. Quanti omomorfismi $S_4 \longrightarrow Q$ ci sono?
4. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato da 2 e da X. Sia $R = \mathbf{Z}[X]/I^2$.
   (a) Determinare $\#R$.
   (b) Esibire un divisore di zero in R.
5. Sia $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli commutativi. Dimostrare che la mappa $f^* : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ data da $f^*(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p})$ è continua per la topologia di Zariski.
6. Sia p un primo e sia k un campo di p^3 elementi. Sia $t : k \longrightarrow k$ l'applicazione $\mathbf{F}_p$-lineare data da $t(x) = x + x^p + x^{p^2}$.
   (a) Dimostrare che l'immagine di t è contenuta nel sottocampo $\mathbf{F}_p$ di k.
   (b) Si sa che $\ker t$ è uno spazio vettoriale su $\mathbf{F}_p$. Determinarne la dimensione.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 3 del foglio 4.
2. Il sottogruppo generato da $\overline{4}$ è $H = \{\overline{4}, \overline{16}, \overline{21}, \overline{41}, \overline{35}, \overline{11}, \overline{1}\}$. In particolare, la classe laterale $\overline{11}H$ è uguale ad H. L'ordine di $\overline{11}H$ è quindi 1.
3. Sia $f : S_4 \longrightarrow Q$ un omomorfismo. Se f fosse suriettivo, il suo nucleo sarebbe un sottogruppo normale di S_4 cardianlità 3. Questo è impossibile, perché un sottogruppo normale che contiene un 3-ciclo, contiene per forza tutti i 3-cicli. L'immagine di f ha quindi cardinalità ≤ 4 ed è abeliano. Questo implica che $A_4 = [S_4, S_4]$ è contenuto nel nucleo di f. Per il primo teorema di isomorfismo, l'omomorfismo f si fattorizza via $\overline{f} : S_4/A_4 \longrightarrow Q$. Poiché S_4/A_4 ha solo due elementi e -1 è l'unico elemento di ordine 2 di Q, ci sono solo due possibilità: f è banale o per ogni $x \in S_4$ si ha che $f(x)$ è il segno di x.
4. Poiché $I^2 = (4, 2X, X^2)$, ogni classe laterale di I ammette un unico rappresentante della forma $aX + b$ con $a \in \{0, 1\}$ e $b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ne segue che $\#R = 8$. L'elemento $X \pmod{I^2}$ è un divisore di zero, perché $2X$ sta in I^2, ma 2 e X no.
5. Questo è l'esercizio 5 del foglio 8.
6. Sia y un elemento dell'immagine di t. Allora $y = x + x^p + x^{p^2}$ per qualche $x \in k$. Poiché $x^{p^3} = x$, questo implica che $y^p = x^p + x^{p^2} + x^{p^3} = x^p + x^{p^2} + x = y$ e quindi y appartiene a $\mathbf{F}_p$. Per la parte (b) osserviamo che $3 = \dim \ker t + \dim \mathrm{im}\, t \leq \dim \ker t + 1$ e quindi $\# \ker t \geq p^2$. D'altra parte, il polinomio $X + X^p + X^{p^2}$ ha al più p^2 zeri. La conclusione è che $\# \ker t = p^2$ e quindi $\dim \ker t = 2$.