Algebra 2 (Schoof) 2^o appello 19 febbraio 2016, ore 10:00-12:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia G un gruppo e sia $\mathrm{Inn}(G)$ il gruppo degli automorfismi interni di G. Dimostrare che $\mathrm{Inn}(G)$ è un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}(G)$.
2. Sia R un dominio. Dimostrare che l'ideale $\{0\}$ è primo. Dimostrare che $\{0\}$ è un punto denso di $\mathrm{Spec}(R)$, nel senso che ogni aperto non vuoto contiene il punto $\{0\}$.
3. Esibire un 3-sottogruppo di Sylow del gruppo alternante A_6.
4. Sia S il sottogruppo di $\mathbf{C}^*$ dato da $S = \{z \in \mathbf{C}^* : |z| = 1\}$. Dimostrare che ogni elemento diverso dall'elemento neutro del gruppo quoziente $\mathbf{C}^*/S$ ha ordine infinito.
5. Quanti elementi α ci sono in $\mathbf{F}_{81}$ con la proprietà che $\mathbf{F}_{81} = \mathbf{F}_3(\alpha)$?
6. Sia R l'anello $\mathbf{Q}[X,Y]/(Y^2 - X^3 + X)$ e sia I l'ideale di R generato dalle classi di X e Y. Dimostrare che l'ideale I^2 è principale e determinarne un generatore.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 3 del foglio 1.
2. Questo è l'esercizio 7 del foglio 8.
3. La cardinalità di A_6 è $\frac{1}{2}6! = 360 = 9 \cdot 40$. Il sottogruppo di A_6 generato dalle permutazioni $(1\,2\,3)$ e $(4\,5\,6)$ ha cardinalità 9 ed è quindi un 3-sottogruppo di Sylow.
4. Sia $z \in \mathbf{C}^*$ e supponiamo che abbia ordine finito in $\mathbf{C}^*/S$. Questo vuol dire che $z^k \in S$ e quindi che $|z|^k = 1$ per qualche intero $k \geq 1$. Se $|z|^k = 1$ allora anche $|z| = 1$. Questo implica che z è l'elemento neutro di $\mathbf{C}^*/S$.
5. Per ogni α il campo $\mathbf{F}_3(\alpha)$ è un sottocampo di $\mathbf{F}_{81}$. Gli unici sottocampi propri di $\mathbf{F}_{81}$ sono $\mathbf{F}_9$ e il suo sottocampo $\mathbf{F}_3$. Questo implica che $\mathbf{F}_{81} = \mathbf{F}_3(\alpha)$ se e solo se $\alpha \notin \mathbf{F}_9$. Ci sono quindi $81 - 9 = 72$ possibilità per α.
6. L'ideale I^2 è generato dalle classi di X^2, XY e Y^2. Poichè si ha che $Y^2 = X^3 - X$ in R, l'ideale I^2 è uguale a $(X^2, XY, X^3 - X)$. L'elemento X è un generatore di I^2, perché gli elementi $X^2, XY, X^3 - X$ sono tutti multipli di X e perché l'elemento $X = X(X^2) - (X^3 - X)$ appartiene ad I^2.