COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Dimostrare che ogni gruppo di cardinalità 4225 è abeliano.
2. Per i primi $p \leq 5$ esibire un p-sottogruppo di Sylow del gruppo simmetrico S_5.
3. Sia H il sottogruppo di $\mathbf{Z}_{65}^*$ generato dagli elementi $-\overline{1}$ e $\overline{14}$. Determinare l'ordine dell'elemento $\overline{9}H$ del gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{65}^*/H$.
4. Quanti punti contiene lo spazio topologico $\mathrm{Spec}(\mathbf{R}[X]/(X^2))$? Spiegare la risposta.
5. Dire se $Y^{2016}+X^2Y-Y-X+1$ è o meno un elemento irriducibile dell'anello $\mathbf{R}[X,Y]$. Spiegare la risposta.
6. (a) Dimostrare che X^2-3 e X^2-2 sono polinomi irriducibili in $\mathbf{F}_5[X]$.
   (b) Esibire un isomorfismo fra i campi $\mathbf{F}_5(\sqrt{2})$ e $\mathbf{F}_5(\sqrt{3})$.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 2 (b) del foglio 4.
2. Poichè $\#S_5 = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, per i primi $p = 3$ e 5, i p-sottogruppi di Sylow hanno cardinalità p e sono quindi ciclici. Per esempio, il gruppo generato dal 3-ciclo $(1\,2\,3)$ è un 3-sottogruppo di Sylow, e il gruppo generato da $(1\,2\,3\,4\,5)$ è un 5-sottogruppo di Sylow. I 2-sottogruppi di Sylow hanno cardinalità 8. L'immagine dell'omomorfismo $D_4 \longrightarrow S_4$, che manda un elemento di D_4 nella permutazione indotta sui vertici del quadrato, ha 8 elementi ed è quindi un 2-sottogruppo di Sylow. Si tratta del gruppo generato da $(1\,2\,3\,4)$ e $(1\,3)$.
3. Dal fatto che $\overline{14}^2 = \overline{1}$ in $\mathbf{Z}_{65}^*$ segue che $H = \{\pm\overline{1}, \pm\overline{14}\}$. Il gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{65}^*/H$ ha quindi $\phi(65)/4 = 12$ elementi. Nel gruppo $\mathbf{Z}_{65}^*$ si ha che $\overline{9}^2 = \overline{16}$ e $\overline{9}^3 = \overline{16} \cdot \overline{9} = \overline{144} = \overline{14}$. L'ordine di $\overline{9}$ in $\mathbf{Z}_{65}^*/H$ è quindi uguale a 3.
4. I punti di $\mathrm{Spec}(\mathbf{R}[X]/(X^2))$ sono gli ideali primi dell'anello $\mathbf{R}[X]/(X^2)$. Essi sono le immagini degli ideali primi di $\mathbf{R}[X]$ che contengono X^2. Visto che $\mathbf{R}[X]$ è un dominio ad ideali principali, si tratta degli ideali primi di $\mathbf{R}[X]$ generati da divisori irriducibili di X^2. Poichè X è l'unico polinomio irriducibile che divide X^2, c'è un unico ideale primo che contiene X^2. Concludiamo che $\mathrm{Spec}(\mathbf{R}[X]/(X^2))$ consiste in un unico punto.
5. Il polinomio $Y^{2016} + (X^2-1)Y - (X-1) \in \mathbf{R}[X][Y]$ è di Eisenstein rispetto al elemento primo $X-1$ dell'anello $\mathbf{R}[X]$ ed è quindi irriducibile.
6. Questo è l'esercizio 4 del foglio 12.