

1. Sia  $R$  un anello e sia  $a \in R$ . Dimostrare: se  $ab = b$  per ogni  $b \in R$  allora  $a = 1$ .
2. Sia  $R$  un anello e sia  $a \in R$  un elemento invertibile. Siano  $b, c \in R$ . Dimostrare che se  $ba = ca$ , allora  $b = c$ . Dedurre che  $a$  ha un unico inverso moltiplicativo.
3. (*Anello di Boole*) Sia  $X$  un insieme e sia  $P(X)$  l'insieme dei sottoinsiemi di  $X$ . Definiamo per  $A, B \in P(X)$

$$A + B = A \Delta B (= A \cup B - A \cap B),$$

$$A \cdot B = A \cap B.$$

Dimostrare che con quest'addizione e moltiplicazione  $P(X)$  diventa un anello commutativo.

4. Siano  $R_1$  e  $R_2$  anelli. Dimostrare che  $(R_1 \times R_2)^* = R_1^* \times R_2^*$ .
5. Sia  $f : R_1 \rightarrow R_2$  un omomorfismo. Far vedere che l'immagine di  $f$  è un sottoanello di  $R_2$ .
6. Sia  $R$  un anello. Far vedere che esiste unico un omomorfismo di anelli  $\mathbf{Z} \rightarrow R$ . Far vedere che esiste unico un omomorfismo di anelli  $R \rightarrow \{0\}$ . Qua  $\{0\}$  indica l'anello zero.
7. Sia  $f : R \rightarrow R'$  un omomorfismo di anelli.
  - (a) Dimostrare che  $f$  manda  $R^*$  in  $R'^*$  e che l'applicazione  $f^* : R^* \rightarrow R'^*$ , data da  $f^*(\varepsilon) = f(\varepsilon)$ , è un omomorfismo di gruppi.
  - (b) Dimostrare che  $f^*$  è iniettivo se  $f$  è iniettivo.
  - (c) È vero che  $f^*$  è suriettivo se  $f$  è suriettivo?
8.
  - (a) Sia  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  un omomorfismo di anelli. Dimostrare che  $f$  è l'identità.
  - (b) Sia  $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$  un omomorfismo di anelli. Dimostrare che  $f$  è l'identità.
  - (c) Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  un omomorfismo di anelli. Dimostrare che  $f(x) > 0$  se  $x > 0$  e che per ogni  $x, y \in \mathbf{R}$  si ha che  $f(x) > f(y)$  se  $x > y$ .
  - (d) Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  un omomorfismo di anelli. Far vedere che  $f$  è l'applicazione identica.
9. Sia  $\mathbf{H}$  il corpo dei quaternioni.
  - (a) Siano  $x, y \in \mathbf{H}$  dati da  $x = 1 + i + j - k$  e  $y = -2 - j + k$ . Calcolare  $x + y$ ,  $x\bar{y}$ ,  $1/x$  e  $\bar{y}^2$ .
  - (b) Dimostrare che  $x \in \mathbf{H}$  ha la proprietà che  $xy = yx$  per ogni  $y \in \mathbf{H}$  se e solo se  $x \in \mathbf{R}$ .  
Un quaternione "puro" è un quaternione della forma  $bi + cj + dk$  con  $b, c, d \in \mathbf{R}$ .
  - (c) Dimostrare  $x$  è un quaternione puro se e solo se  $\bar{x} = -x$ .
  - (d) Dimostrare che i quaternioni puri formano un  $\mathbf{R}$ -spazio vettoriale  $\mathbf{H}_0$  di dimensione 3.
  - (e) Dimostrare che ogni quaternione puro  $x$  di norma  $x\bar{x} = 1$  soddisfa  $x^2 = -1$ .