

1. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che $\ker f$ è un sottogruppo normale di G . È sempre vero che l'immagine di f è un sottogruppo normale di H ?
2. Siano H_1 e H_2 due sottogruppi normali di un gruppo G . Dimostrare che $H_1 \cap H_2$ è anche un sottogruppo normale di G .
3. Sia G un gruppo e siano H, H' due sottogruppi normali di G con la proprietà che G/H e G/H' sono abeliani. Dimostrare che $G/(H \cap H')$ è abeliano.
4. Siano G_1 e G_2 due gruppi con elementi neutri e_1 rispettivamente e_2 . Dimostrare che $G_1 \times \{e_2\}$ e $\{e_1\} \times G_2$ sono sottogruppi normali di $G_1 \times G_2$.
5. Sia G un gruppo e siano $H \subset G$ un sottogruppo di G . Sia $H' \subset H$ un sottogruppo di H .
 - (a) Dimostrare che H' è anche un sottogruppo di G .
 - (b) Esibire un esempio dove H' è un sottogruppo normale di H e H è un sottogruppo normale di G , ma H' non è un sottogruppo normale di G . (Sugg. esibire sottogruppi opportuni di $G = D_4$.)
6. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo suriettivo di gruppi e sia $N \subset H$ un sottogruppo normale di H . Dimostrare che $f^{-1}(N)$ è un sottogruppo normale di G e che la mappa $G/f^{-1}(N) \longrightarrow H/N$ definita da $f(\bar{g}) = f(g) \pmod{N}$ è un isomorfismo ben definito.
7. Per $F = \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$ scriviamo F^{*2} per l'insieme $\{x^2 : x \in F^*\}$ dei quadrati di F .
 - (a) Dimostrare che F^{*2} è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo F^* .
 - (b) Dimostrare che il quoziente $\mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*2}$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_2$. Dimostrare che $\mathbf{C}^*/\mathbf{C}^{*2}$ è il gruppo banale.
 - (c) Dimostrare che $\mathbf{Q}^*/\mathbf{Q}^{*2}$ è un gruppo infinito.
8. Sia p un numero primo. Consideriamo il gruppo additivo finito $A = \mathbf{Z}_{p^3} \times \mathbf{Z}_p$. Sia $f : A \longrightarrow A$ l'applicazione data da

$$f(a) = p^2 a = \underbrace{a + a + \dots + a}_{p^2 \text{ volte}}, \quad \text{per } a \in A.$$
 - (a) Dimostrare che f è un omomorfismo.
 - (b) Dimostrare che $\text{im } f \subset \ker f$.
 - (c) Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\ker f / \text{im } f$?
9. Sia G il gruppo additivo $\mathbf{Z}_{12}$ e sia H il gruppo moltiplicativo $\mathbf{Z}_{12}^*$. Quanti omomorfismi $G \longrightarrow H$ ci sono? Quanti omomorfismi $H \longrightarrow G$ ci sono?
10. Dimostrare che S_5 contiene un elemento di ordine 6. Esibire $n > 1$ tale che il gruppo simmetrico S_n contiene un elemento di ordine almeno n^2 .
11. Sia n un numero naturale che soddisfa $\text{mcd}(n, 10) = 1$. Dimostrare che la lunghezza del periodo dell'espansione decimale della frazione $1/n$ è uguale all'ordine di $\overline{10}$ nel gruppo $\mathbf{Z}_n^*$.