

1. Sia G un gruppo e sia $g \in G$. Sia $f : \mathbf{Z} \rightarrow G$ l'applicazione definita da $f(n) = g^n$. Dimostrare che f è un omomorfismo e descrivere il nucleo e l'immagine in termini di proprietà dell'elemento g .
2. Sia G il gruppo $\mathbf{Z}_8^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$. Determinare le classi laterali dei sottogruppi $H_1 = \{\bar{1}, \bar{3}\}$, $H_2 = \{\bar{1}, \bar{5}\}$ e $H_3 = \{\bar{1}, \bar{7}\}$.
3. (a) Dimostrare che un sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico. Dimostrare che un quoziente di un gruppo ciclico è ciclico.
 (b) Sia $m \in \mathbf{Z}_{>0}$. Dimostrare che per ogni sottogruppo H di \mathbf{Z} esiste $n \in \mathbf{Z}$ tale che $H = \{kn : k \in \mathbf{Z}\}$. Dimostrare che per $n \neq 0$ si ha che $\mathbf{Z}/H = \mathbf{Z}_n$. Determinare la struttura di \mathbf{Z}/H quando $n = 0$.
 (c) Dimostrare che per ogni sottogruppo H di \mathbf{Z}_m esiste un divisore d di m tale che $H = \{\bar{a} \in \mathbf{Z}_m : d \text{ divide } a\}$. Enumerare i sottogruppi di \mathbf{Z}_{12} .
4. Dimostrare che il gruppo quoziente \mathbf{C}/\mathbf{R} è isomorfo a \mathbf{R} .
5. Sia $H \subset \mathbf{Z}_{31}^*$ il sottogruppo generato da $\bar{2}$.
 (a) Quanti elementi ha H ? Quanti elementi ha il gruppo quoziente \mathbf{Z}_{31}^*/H ?
 (b) Dimostrare che \mathbf{Z}_{31}^*/H è ciclico.
6. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{R}^*/\{+1, -1\}$ è isomorfo al gruppo additivo \mathbf{R} .
7. Sia $G = \mathbf{Z}_{20}^*$.
 (a) Sia H il sottogruppo generato da $\bar{9}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
 (b) Sia H il sottogruppo generato da $\bar{19}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
8. Sia $G = \mathbf{Z}_{32}^*$.
 (a) Sia H il sottogruppo generato da $\bar{25}$ e $\bar{31}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
 (b) Sia H il sottogruppo generato da $\bar{5}$ e $\bar{9}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
9. Sia G il gruppo moltiplicativo \mathbf{C}^* e sia $S = \{z \in \mathbf{C}^* : |z| = 1\}$.
 (a) Dimostrare che S è un sottogruppo di \mathbf{C}^* .
 (b) Chi sono le classi laterali di S ?
 (c) Dimostrare che il gruppo \mathbf{C}^*/S è isomorfo al gruppo additivo \mathbf{R} .
10. Sia G il gruppo $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_8$ e sia H il sottogruppo generato dall'elemento v . Nei seguenti casi determinare l'ordine di v e determinare la struttura del gruppo quoziente G/H .
 (a) $v = (\bar{0}, \bar{2})$; (b) $v = (\bar{1}, \bar{0})$; (c) $v = (\bar{1}, \bar{2})$.