

1. Siano $\sigma, \tau \in S_n$.
 - (a) Sia $a \in \{1, 2, \dots, n\}$ e sia $b = \tau(a)$. Far vedere che la permutazione $\sigma\tau\sigma^{-1}$ manda $\sigma(a)$ in $\sigma(b)$.
 - (b) Se $\tau = (a_1 a_2 \dots a_k)$ è un k -ciclo, allora $\sigma\tau\sigma^{-1}$ è il ciclo $(\sigma(a_1) \sigma(a_2) \dots \sigma(a_k))$.
 - (c) Dimostrare che se τ è un prodotto di t cicli disgiunti di lunghezze $k_1, k_2, \dots, k_t$, allora questo è vero anche per $\sigma\tau\sigma^{-1}$.
 - (d) Provare che se la permutazione $\sigma\tau$ è un prodotto di t cicli disgiunti di lunghezze $k_1, k_2, \dots, k_t$, allora questo è vero anche per $\tau\sigma$.

2. Dimostrare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi ben definiti:

- | | |
|--|------------------------------------|
| (a) $\mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}^*$ | $x \mapsto x $, |
| (b) $\mathbf{Z}_{10} \longrightarrow \mathbf{Z}_5$ | $x \pmod{10} \mapsto x \pmod{5}$, |
| (c) $\mathbf{Z}_{10}^* \longrightarrow \mathbf{Z}_5^*$ | $x \pmod{10} \mapsto x \pmod{5}$, |
| (d) $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}^*$ | $x \mapsto \cos(x) + \sin(x)i$, |
| (e) $\mathbf{Z}_4 \longrightarrow \mathbf{Z}_5^*$ | $x \mapsto 2^x$. |
| (f) $\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{R}^*$ | $a + bi \mapsto a^2 + b^2$, |

Quali sono iniettive e quali suriettive? Determinare i nuclei e le immagini.

3. Sia G un gruppo e sia $g \in G$.
 - (a) Dimostrare che l'applicazione data da $x \mapsto gxg^{-1}$ è un automorfismo di G .
 - (b) Sia $H \subset G$ un sottogruppo. Dimostrare che $gHg^{-1} = \{gxg^{-1} : x \in H\}$ è un sottogruppo di G .
4. Sia G un gruppo. Dimostrare che l'applicazione $F : G \longrightarrow G$ data da $F(x) = x^2$ è un omomorfismo se e soltanto se G è abeliano. Dimostrare che l'applicazione $x \mapsto x^{-1}$ è un omomorfismo se e soltanto se G è abeliano.
5. Provare che ci sono isomorfismi

$$\mathbf{Z}_{12}^* \cong D_2 \cong P(X)$$

dove $P(X)$ è l'insieme delle parti di $X = \{0, 1\}$ con composizione la differenza simmetrica.

6. Sia G un gruppo e siano H e H' due sottogruppi con le seguenti proprietà:
 - $hh' = h'h$ per ogni $h \in H, h' \in H'$,
 - $H \cap H' = \{e\}$,
 - Per ogni $g \in G$ ci sono $h \in H$ e $h' \in H'$ tali che $g = hh'$.

Dimostrare che l'applicazione

$$f : H \times H' \longrightarrow G$$

data da $f(h, h') = hh'$ è un isomorfismo.

7. Sia S il sottogruppo moltiplicativo $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ di $\mathbf{C}^*$. Dimostrare che

$$\mathbf{C}^* \cong \mathbf{R}_{>0} \times S.$$

(Sugg. utilizzare l'esercizio precedente.)