1. Per i seguenti insiemi G e "composizioni" $*$, indicare, se esiste, un elemento neutro. Dire quando si tratta di un gruppo:
   (a) $G = \mathbf{Z}_{>0}$ con $a * b = a^b$.
   (b) $G = \mathbf{R}$ con $a * b = a + b + 3$,
   (c) $G = \mathbf{R}_{>1}$ con $a * b = a^{\log(b)}$.
   (d) $G = \{-1, 0, 1\}$ con $a * b = a + b$.
   (e) $G = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ con $a*b = \max(a, b)$.
   (f) $G = \mathbf{R}^2$ con $\binom{a}{b} * \binom{c}{d} = \binom{c+ad}{bd}$.

2. (a) Sia G un gruppo e siano $a, b \in G$. Dimostrare che l'equazione
   $$ax = b$$
   ha una unica soluzione $x \in G$. Questa soluzione è $x = a^{-1}b$. Similmente, dimostare che esiste una unica soluzione $x \in G$ di $xa = b$, vale a dire $x = ba^{-1}$.
   (b) (Proprietà Sudoku) Provare che, nella tabella di composizione di un gruppo finito, ogni elemento compare esattamente una volta in ogni riga ed ogni colonna.

3. Sia X un insieme e sia $P(X)$ l'insieme delle parti di X. *La differenza simmetrica* $A \triangle B$ di due sottoinsiemi A e B di X è definita da
   $$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B).$$
   Dimostrare che $P(X)$ con la composizione $\triangle$ è un gruppo abeliano. Scrivere la tabella di composizione per un insieme X di due elementi.

4. Sia G un gruppo con elemento neutro e.
   (a) Provare: se $x^2 = e$ per ogni $x \in G$, allora G è commutativo.
   (b) Provare: se $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$ per ogni $a, b \in G$, allora G è commutativo.
   (c) Provare: se $a^2b^2 = (ab)^2$ per ogni $a, b \in G$, allora G è commutativo.

5. Una trasformazione *affine* di $\mathbf{R}$ è una applicazione $A : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ data da
   $$x \mapsto ax + b$$
   con $a \in \mathbf{R}^*$ e $b \in \mathbf{R}$. Dimostrare che le trasformazioni affini di $\mathbf{R}$ formano un gruppo con la composizione. Si tratta di un gruppo commutativo?

6. Sia G un gruppo e sia X un insieme. Sia G^X l'insieme delle mappe $X \longrightarrow G$. Siano $f, g \in G^X$. Definiamo $f \circ g$ nel modo seguente:
   $$(f \circ g)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{per } x \in X.$$
   (a) Dimostrare che G^X è un gruppo rispetto alla composizione $\circ$.
   (b) Dimostrare che G^X è commutativo se e soltanto se G è commutativo.

7. Dimostrare che l'insieme $\{+1, -1, +i, -i\} \subset \mathbf{C}^*$ è un gruppo moltiplicativo.

8. Scrivere la tabella di composizione per il gruppo diedrale D_3.

9. (a) Determinare tutti gli interi $n > 0$ per cui il gruppo $\mathbf{Z}_n^*$ ha cardinalità 1.
   (b) Determinare tutti gli interi $n > 0$ per cui il gruppo $\mathbf{Z}_n^*$ ha cardinalità 2.
   (c) Determinare tutti gli interi $n > 0$ per cui il gruppo $\mathbf{Z}_n^*$ ha la proprietà che $\overline{x} \cdot \overline{x} = \overline{1}$ per ogni $\overline{x} = \mathbf{Z}_n^*$.