

1. (a) Dimostrare che se $n \geq 2$ non è primo, allora esiste un primo $p \leq \sqrt{n}$ che divide n .
(b) Sfruttare il risultato (a) per dimostrare che 467 è primo
2. Fattorizzare i seguenti numeri in fattori primi.
(a) 91; (c) $15^2 - 2^2$; (e) $2^{10} - 1$;
(b) 210; (d) $10!$; (f) $2^{11} - 1$;
3. Determinare il resto delle divisioni per 3, 9, 4, 11 del numero 3548917.
4. Calcolare $\text{mcd}(623, 413)$, $\text{mcd}(1014, 273)$, $\text{mcd}(1122, 105)$ e $\text{mcd}(2244, 418)$.
5. Siano a e b interi con $\text{mcd}(a, b) = d$. Dimostrare che $\text{mcd}(a/d, b/d) = 1$.
6. Siano $n, m \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Siano $\text{mcd}(n, m)$ e $\text{mcm}(n, m)$ il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo fra n ed m . Dimostrare che $\text{mcm}(n, m) \cdot \text{mcd}(n, m) = nm$.
7. Per i seguenti numeri n e m , determinare $a, b \in \mathbf{Z}$ tali che $an + bm = \text{mcd}(n, m)$.
(a) $n = 4$ e $m = 30$; (c) $n = 103$ e $m = 101$; (e) $n = 221$ e $m = 169$;
(b) $n = 14$ e $m = 40$; (d) $n = 91$ e $m = 0$; (f) $n = 10001$ e $m = 9999$.
8. (a) Scrivere il numero 123 in base 2 e in base 7;
(b) Scritto in base 2 sia $n = 10010001001$. Esprimere n in base 3;
(c) Scritto in base 16, siano $n = AB$ e $m = 9C$. Calcolare nm e scrivere il risultato in base 16.
9. Per le seguenti relazioni R di $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ stabilire quali sono simmetriche, riflessive o transitive.
(a) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n = m\}$; (b) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : |n - m| = 5\}$;
(c) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n \geq m\}$; (d) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n^2 \equiv m^2 \pmod{7}\}$.
10. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
(a) Esibire una relazione su di X , che sia riflessiva, simmetrica, ma non transitiva.
(b) Esibire una relazione su di X , che sia simmetrica, transitiva ma non riflessiva.
(c) Esibire una relazione su di X , che sia riflessiva, transitiva, ma non simmetrica.
11. Sia $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e sia $R = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A : a + d = b + c\}$.
(a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
(b) Sia $\tilde{A}$ = l'insieme delle classi di equivalenza di R . Dimostrare che la mappa $f : \tilde{A} \rightarrow \mathbf{Z}$ che associa la differenza $a - b$ alla classe di (a, b) , è ben definita ed è una biezione.
12. Sia A un insieme di n elementi. Per $i = 0, 1, \dots, n$, sia $P_i \subset P(A)$ la collezione dei sottoinsiemi di A che possiedono esattamente i elementi.
(a) Dimostrare che gli insiemi P_i formano una partizione di $P(A)$.
(b) Esibire una relazione di equivalenza su $P(A)$ che induce la partizione $\{P_i\}$ di $P(A)$.
13. Quante relazioni di equivalenza distinte si possono definire sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$?