1. Dimostrare che il gruppo simmetrico S_5 contiene un elemento di ordine 6. Esibire $n > 1$ tale che il gruppo simmetrico S_n contiene un elemento di ordine almeno n^2 .
2. Stabilire se il gruppo alternante A_4 è isomorfo o meno al gruppo diedrale D_6 . Spiegare la risposta.
3. Dimostrare che per nessun $n \geq 3$ i gruppi S_n e $A_n \times \mathbf{Z}_2$ sono isomorfi.
4. Sia G un gruppo finito con la proprietà che $\text{Aut}(G)$ è banale.
 - (a) Dimostrare che G è abeliano;
 - (b) Dimostrare che ogni elemento di G ha ordine ≤ 2 ;
 - (c) Dimostrare che $\#G = 1$ oppure 2.

5. Sia R un anello commutativo. Dimostrare che

$$I = \{f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots \in R[X] : a_0 = a_1 = a_2 = 0\}$$

è un ideale di $R[X]$.

6. Scrivere il polinomio $(X^2 + 1)(Y^2 + 1)(Z^2 + 1)$ come polinomio nei polinomi simmetrici elementari $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{Z}[X, Y, Z]$.
7. Determinare le cardinalità dei seguenti anelli:
 - (a) $\mathbf{Z}[X]/(X^3 + X + 1, X - 1, 3)$;
 - (b) $\mathbf{Z}[X, Y]/(Y^2 - X, Y - 3X, X - 2)$;
 - (c) $\mathbf{Z}_3[X, Y, Z]/(Y^2 - X^2, Y - Z^3, X - Z)$;
 - (d) $\mathbf{Z}[i]/(12 - i, 29)$.
8. Determinare $\#R^*$ per l'anello $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-2}]/(3)$. Stessa domanda per gli anelli $\mathbf{Z}[i]/(4)$ e $\mathbf{Z}_5[X]/(X^3 - 1)$.
9. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato dai polinomi $X^2 - 1$ e $X^2 + 1$. Quanti sono gli elementi invertibili dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I$?
10. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X, Y]$ l'ideale generato da $X^2 - Y$, $Y - 1$ e 3. Calcolare la cardinalità del gruppo degli elementi invertibili del anello quoziente $\mathbf{Z}[X, Y]/I$.
11. Sia $\mathbf{R}$ il campo dei numeri reali e sia A l'anello $\mathbf{R}[X]/(X^2)$. Sia $\phi : \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R} \times A$ l'applicazione data da $\phi(g) = (g(1), \bar{g})$ per $g \in \mathbf{R}[X]$. Qua $\bar{g} \in A$ indica la classe modulo X^2 di g .
 - (a) Dimostrare che ϕ è un omomorfismo suriettivo di anelli.
 - (b) Esibire un generatore del nucleo di ϕ .
12. Dimostrare che ogni numero naturale n con $\text{mcd}(n, 10) = 1$ divide un numero della forma 11111...11111 (per esempio, 37 divide 111; sugg: prima dimostrare che n divide un numero della forma 9999...9999).