

1. (a) Dimostrare che la mappa $\Psi : \mathbf{Z}[X] \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ data da $f \mapsto f(0) \pmod{2}$ è un omomorfismo di anelli suriettivo.
 (b) Dimostrare che $\ker(\Psi)$ è l'ideale $(2, X)$.
 (c) Dimostrare che c'è un isomorfismo

$$\mathbf{Z}[X]/(2, X) \cong \mathbf{Z}_2$$

2. Dimostrare che l'ideale (X, Y) dell'anello $\mathbf{Q}[X, Y]$ non è principale.
3. Dimostrare che ognuno degli anelli quozienti $\mathbf{Z}[X]/(5, X - 2)$, $\mathbf{Z}[X]/(5, 2X - 2)$ e $\mathbf{Z}[X]/(5, X - 2, X^2 + 1)$ è un campo di 5 elementi.
4. (a) Dimostrare che l'anello $\mathbf{Z}[i]/(2 + i)$ è isomorfo al campo \mathbf{Z}_5 .
 (b) Dimostrare che l'anello $\mathbf{Z}[i]/(3)$ è un campo di 9 elementi.
5. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbf{Z}[i]$, determinare il resto della divisione di $5 + 14i$ per $3 + 5i$. (Sarebbe meglio dire: "un" resto ...). Determinare $\text{mcd}(5 + 14i, 3 + 5i)$.
6. Sia k un campo. Un polinomio $f \in k[X]$ si dice irriducibile, se non è costante e se non è prodotto di due polinomi non costanti.
 (a) Dimostrare che ogni polinomio di grado 1 è irriducibile.
 (b) Dimostrare che $X^2 + 1 \in \mathbf{R}[X]$ è irriducibile.
 (c) Dimostrare che se f è irriducibile, allora l'anello quoziente $k[X]/(f)$ è un campo.
7. Sia R il sottoanello di \mathbf{C} dato da $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbf{Z}\}$. Sia $N : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ l'applicazione data da $N(x) = x\bar{x}$.
 (a) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbf{C}$ esiste $y \in R$ tale che $|N(x - y)| \leq \frac{3}{4}$.
 (b) Dimostrare che $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ è un dominio Euclideo.
8. Siano R e K i sottoanelli del campo \mathbf{R} dei numeri reali, dati rispettivamente da $R = \mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Z}\}$ e $K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Q}\}$. Sia $N : K \longrightarrow \mathbf{Q}$ l'applicazione data da $N(a + b\sqrt{2}) = |(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})| = |a^2 - 2b^2|$.
 (a) Dimostrare che K è isomorfo al campo quoziente di R .
 (b) Dimostrare che $N(xy) = N(x)N(y)$ per ogni $x, y \in K$.
 (c) Dimostrare che per ogni $x \in K$ esiste $y \in R$ tale che $N(x - y) \leq \frac{1}{2}$.
 (d) Dimostrare che $R = \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ è un dominio Euclideo rispetto alla funzione N .
9. Dimostrare che il sottoanello di \mathbf{C} dato da $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbf{Z}\}$ non è un dominio ad ideali principali.
10. Sia $\zeta = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \in \mathbf{C}$. Allora si ha che $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$. Sia R l'anello dato da $\mathbf{Z}[\zeta] = \{a + b\zeta : a, b \in \mathbf{Z}\}$.
 (a) Dimostrare che R è un anello Euclideo rispetto alla funzione $N : (R - \{0\}) \longrightarrow \mathbf{Z}_{\geq 1}$ data da $N(x) = x\bar{x}$.
 (b) Sia p un numero primo diverso da 3. Dimostrare che $p = x^2 + xy + y^2$ per certi $x, y \in \mathbf{Z}$ se e solo se $p \equiv 1 \pmod{3}$.