COGNOME

NOME

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Siano α, β, γ gli zeri complessi del polinomio $X^3 + X + 3$.
Determinare l'intero $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.
2. Determinare un generatore dell'ideale di $\mathbf{Z}[i]$ generato da $4 + 3i$ e 10 .
3. Sia q una potenza di un numero primo $p > 2$. Dimostrare che il polinomio $X^2 - 1$ ha esattamente due zeri nell'anello $\mathbf{Z}_q$.
4. Quanti ideali possiede l'anello $\mathbf{Z}_6 \times \mathbf{R}$?
5. Un elemento x di un anello commutativo R si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per qualche intero $n \geq 1$. Sia $N = \{x \in R : x \text{ è nilpotente}\}$.
(a) Dimostrare che se N è un ideale di R .
(b) Dimostrare che l'anello quoziente R/N non possiede elementi nilpotenti non nulli.
6. Determinare la cardinalità dell'anello $\mathbf{Z}[X]/I$ dove I è l'ideale generato dai polinomi $X^2 + 1$ e $3X$.

Soluzioni.

1. Si ha che $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -(\alpha + 3) - (\beta + 3) - (\gamma + 3)$. Poiché il coefficiente di X^2 del polinomio è zero, si ha che $\alpha + \beta + \gamma = 0$ e quindi $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -9$.
2. Facciamo una divisione con resto nell'anello Euclideo $\mathbf{Z}[i]$: $10 = (2 - i)(4 + 3i) - (1 + 2i)$ e $(4 + 3i) = (2 - i)(1 + 2i)$ con resto zero. L'ideale è quindi generato da $1 + 2i$.
3. Questo è l'esercizio 8 (a) del foglio 10.
4. Ogni ideale di $\mathbf{Z}_6 \times \mathbf{R}$ è prodotto di un ideale di $\mathbf{Z}_6$ e un ideale di $\mathbf{R}$. Il campo $\mathbf{R}$ ha solo due ideali, mentre l'anello $\mathbf{Z}_6$ ha quattro ideali: uno per ogni divisore di 6. Ci sono quindi $4 \times 2 = 8$ ideali.
5. La parte (a) è l'esercizio 9 (b) del foglio 13. Per (b): Sia $x \in R$ tale che $\bar{x} \in R/N$ è nilpotente. Allora $x^n \in N$ per qualche intero $n \geq 1$. E quindi $x^{nm} = 0$ per qualche intero $m \geq 1$. Questo vuol dire che $x \in N$ e quindi $\bar{x}$ è zero in R/N .
6. Poiché $3 = 3(X^2 + 1) - X \cdot 3X$, l'ideale I è uguale a $(X^2 + 1, 3)$. L'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I$ è quindi isomorfo a $\mathbf{Z}_3[X]/(X^2 + 1)$ ed ha $3^2 = 9$ elementi. Alternativamente, si può osservare che dalla relazione $X^2 = -1$ in $\mathbf{Z}[X]/I$ segue che X è invertibile. E quindi se $3X \in I$ anche $3 \in I$.