Algebra 1 (Schoof) 1^o esonero 20 novembre 2014, ore 16:00–18:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $\sim$ la relazione su $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$ data da $(x, y) \sim (x', y')$ se $xx' > 0$ e $yy' > 0$.
   (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Quante classi di equivalenza ci sono?

2. Determinare tutte le soluzioni $x \in \mathbf{Z}$ del sistema di congruenze $\begin{cases} 9x \equiv \ 20 \pmod 8, \\ \ \ x \equiv -2 \pmod 5, \\ -8x \equiv \ \ 4 \pmod 9; \end{cases}$

3. Sia G il gruppo $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_8$ e sia H il sottogruppo generato dall'elemento $v = (\overline{1}, \overline{2})$. Il gruppo quoziente G/H è ciclico? Spiegare la risposta.

4. Sia G un gruppo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale. Dimostrare che il gruppo quoziente G/N è commutativo se e solo se il gruppo $[G, G]$ dei commutatori è contenuto in N.

5. Consideriamo il gruppo simmetrico S_5.
   (a) Siano $\sigma = (1\,2\,3\,4)$ e $\tau = (2\,3\,5)$. Calcolare l'ordine di $[\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$.
   (b) Determinare il più piccolo intero $m \geq 1$ per cui non esiste un elemento in S_5 di ordine m.

6. Il gruppo diedrale D_3 è un sottogruppo del gruppo diedrale D_9. Dire se D_3 è o meno un sottogruppo normale di D_9. Spiegare la risposta.

Soluzioni.

1. Ci sono quattro classi di equivalenza: i quattro quadranti del piano $\mathbf{R}^2$.
   (Si veda http://it.wikipedia.org/wiki/Quadrante_(geometria_analitica))

2. Questo è l'Esercizio 7 (c) del foglio 3.

3. Questo è l'Esercizio 10 (c) foglio 7.

4. Il gruppo G/N è commutativo se e solo se $xNyN = yNxN$ per ogni $x, y \in G$. Questo vuol dire che $xyN = yxN$ e quindi $x^{-1}y^{-1}xy \in N$ per ogni $x, y \in G$. Poiché il gruppo $[G, G]$ è generato da commutatori, questo vuol dire che $[G, G] \subset N$ come richiesto.

5. (a) Si ha che $[\sigma, \tau] = (2\,3)(4\,5)$ e quindi $[\sigma, \tau]$ ha ordine 2. (b) Per ogni $k \leq 5$ il gruppo S_5 contiene k-cicli e k-cicli hanno ordine k. Elementi del tipo $(1\,2\,3)(4\,5)$ in S_5 hanno ordine 6, ma non esistono elementi di ordine 7, perché 7 non divide $5! = \#S_5$.

6. Sia R la rotazione intorno l'origine di angolo $2\pi/9$ e sia T la riflessione rispetto all'ascisse. Allora D_9 è generato da R e T. Il suo sottogruppo D_3 consiste negli elementi id, R^3, R^6, T, R^3T e R^6T. Quindi la riflessione T sta in D_3. Però, l'elemento $RTR^{-1} = R^2T$ non sta in D_3 e quindi D_3 non è normale in D_9.