COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia R un anello commutativo e siano I e J due ideali di R.
   Dimostrare che $(I+J)(I\cap J)\subset IJ$.

2. Quanti omomorfismi di anelli $\mathbf{Z}[X]/(X^2+1)\longrightarrow \mathbf{Z}_4$ ci sono?

3. Siano R_1 ed R_2 due anelli commutativi. Dimostrare che ogni ideale $I\subset R_1\times R_2$ ha la forma $I=I_1\times I_2$ dove I_1 è un ideale di R_1 e I_2 è un ideale di R_2.

4. Sia G il gruppo moltiplicativo $\mathbf{C}^*$ e sia $S=\{z\in\mathbf{C}^* : |z|=1\}$.
   (a) Dimostrare che S è un sottogruppo di $\mathbf{C}^*$.
   (b) Dimostrare che il gruppo $\mathbf{C}^*/S$ è isomorfo al gruppo additivo $\mathbf{R}$.

5. Per ogni omomorfismo di gruppi $g : S_3\longrightarrow \mathbf{Z}_{12}$, determinare $g((1\,2\,3))$.

6. Sia $\varphi : \mathbf{Z}_{39}^*\longrightarrow \mathbf{Z}_{39}^*$ l'omomorfismo di gruppi dato da $\varphi(x)=x^2$ e sia $H=\ker\varphi$. Calcolare l'ordine dell'elemento $\overline{5}H$ del gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{39}^*/H$.

Soluzioni.

1. Un elemento a di $(I+J)(I\cap J)$ è una somma di elementi della forma $(x+y)z$ con $x\in I$, $y\in J$ e $z\in I\cap J$. Poiché $xz\in IJ$ e $yz\in JI=IJ$, anche $(x+y)z$ sta in IJ. Ne segue che a appartiene ad IJ.
2. Con $\overline{X}\in\mathbf{Z}[X]/(X^2+1)$ indichiamo la classe laterale di X. Ogni omomorfismo di anelli $g:\mathbf{Z}[X]/(X^2+1)\longrightarrow\mathbf{Z}_4$ è determinato dall'elemento $g(\overline{X})$ di $\mathbf{Z}_4$. Poiché $\overline{X}^2+1=0$ in $\mathbf{Z}[X]/(X^2+1)$, abbiamo che $g(\overline{X})^2+1=g(\overline{X}^2+1)=0$ in $\mathbf{Z}_4$. Dal fatto che nessun elemento $u\in\mathbf{Z}_4$ soddisfa $u^2+1=0$, segue che non ci sono omomorfismi da $\mathbf{Z}[X]/(X^2+1)$ a $\mathbf{Z}_4$.
3. Questo è l'esercizio 11 del foglio 10.
4. Questo è l'esercizio 9 del foglio 7.
5. Poiché $\mathbf{Z}_{12}$ è abeliano, i commutatori di S_3 stanno nel nucleo di g. La permutazione $(1\,2\,3)$ è pari ed è quindi un commutatore. Ne segue che $g((1\,2\,3))=\overline{0}$.
6. Abbiamo che $H=\{\overline{x}\in\mathbf{Z}_{39}^* : \overline{x}^2=\overline{1}\}=\{\pm\overline{1},\pm\overline{14}\}$. Dal fatto che $\overline{5}\not\in H$, ma $\overline{5}^2=-\overline{14}\in H$, segue che l'elemento $\overline{5}H$ ha ordine 2 in $\mathbf{Z}_{39}^*/H$.