COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Siano $\sigma, \tau \in S_8$ dati da $\sigma = (1\,2\,3\,6\,7)$ e $\tau = (4\,2\,1)(6\,5\,3)$. Determinare l'ordine di $\sigma\tau$.

2. Sia G un gruppo, sia n un numero naturale e sia $H \subset G$ il sottogruppo generato dalle n-esime potenze g^n degli elementi $g \in G$.
   (a) Dimostrare che H è un sottogruppo normale di G.
   (b) Dimostrare che per ogni elemento x del gruppo quoziente G/H la n-esima potenza x^n è l'elemento neutro di G/H.

3. Sia $= \mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ il sottoanello $\{a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbf{Z}\}$ di $\mathbf{C}$. Sia $N : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ l'applicazione norma data da $N(x) = x\overline{x}$. Dimostrare che $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ è un dominio Euclideo rispetto alla norma data.

4. Sia I l'ideale di $\mathbf{Z}[X]$ generato da 2 e X e sia $J = I^2$. Determinare la cardinalità dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/J$.

5. Quanti omomorfismi ci sono dal gruppo simmetrico S_3 al gruppo diedrale D_4?

6. Sia k un campo e sia $\phi : k[X, Y] \longrightarrow k[Y]$ l'omomorfismo che manda $f(X, Y)$ in $f(Y, Y)$. Esibire un generatore del nucleo di ϕ.

Soluzioni.

1. Sia ha che $\sigma\tau = (1\,4\,3\,7)(5\,6)$. Poiché i cicli sono disgiunti, l'ordine è 4.
2. Per ogni $g, h \in G$ si ha che $hg^nh^{-1} = (hgh^{-1})^n$. In altre parole, il coniugio per h preserva l'insieme delle n-esime potenze. Allora il coniugio per h preserva anche il sottogruppo H. Sia x un elemento di G/H. Allora x è qualche classe laterale gH. La n-esima potenza di x è la classe g^nH. Poiché $g^n \in H$ si tratta della classe banale.
3. Questo è l'esercizio 7 (b) del foglio 11.
4. L'ideale $J = I^2$ è generato da X^2, $2X$ e 4. Ogni classe modulo J ha quindi un unico rappresentante della forma $aX + b$ con $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $a \in \{0, 1\}$. La cardinalità di R/J è quindi $2 \times 4 = 8$.
5. Questo è l'esercizio 9 (b) del foglio 14.
6. Per ogni anello commutativo R ed ogni $a \in R$, l'omomorfismo $R[X] \longrightarrow R$ dato da $f(X) \mapsto f(a)$, ha nucleo uguale all'ideale generato da $X - a$. Se applichiamo questo all'anello $R = k[Y]$ e l'elemento $a = Y$, vediamo che il nucleo di ϕ è generato da $X - Y$.