Algebra 1 (Schoof) 1^o appello 5 febbraio 2015, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia p il numero primo 211. Quante radici primitive ci sono in $\mathbf{Z}_p^*$?

2. Sia G un gruppo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale di cardinalità 2. Dimostrare che N è contenuto nel centro $Z(G)$ di G.

3. Sia H il sottogruppo di $\mathbf{Z}_{35}^*$ generato da $\overline{4}$ e sia G il gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{35}^*/H$.
   (a) Determinare $\#G$.
   (b) La classe laterale $\overline{3}H$ è un elemento di G. Determinare il suo ordine.

4. Siano α, β, γ gli zeri complessi del polinomio $X^3 + X^2 + 1$. Determinare l'intero

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

5. Sia $\mathbf{R}$ il campo dei numeri reali. Quanti ideali possiede l'anello $\mathbf{R}[X]/(X^2)$?

6. Sia R l'anello $\mathbf{Z}[X,Y]/(7, Y+2, X^2+Y)$. Determinare $\#R^*$.

Soluzioni.

1. Il gruppo $\mathbf{Z}_p^*$ è ciclico di ordine $p-1$. Ci sono quindi $\phi(p-1)$ generatori. In altre parole, ci sono $\phi(210) = 48$ radici primitive.
2. Questo è l'esercizio 6 del foglio 14.
3. Le potenze di $\overline{4}$ sono $\overline{4}, \overline{16}, \overline{29}, \overline{11}, \overline{9}, \overline{1}$. Si ha quindi che $\#H = 6$ e $\#G = \phi(35)/6 = 4$. Per la parte (b) si osserva che $\overline{3}$ non appartiene ad H, ma il suo quadrato sì. L'ordine di $\overline{3}H$ è quindi 2.
4. Questo è l'esercizio 2 del foglio 13.
5. Gli ideali di $\mathbf{R}[X]/(X^2)$ corrispondono biiettivamente agli ideali di $\mathbf{R}[X]$ che contengono X^2. Ora $\mathbf{R}[X]$ è un dominio ad ideali principali. Gli ideali di $\mathbf{R}[X]$ che contengono X^2 sono generati da polinomi monici che dividono X^2. Poiché gli unici divisori monici di X^2 sono 1, X e X^2, l'anello $\mathbf{R}[X]/(X^2)$ possiede esattamente tre ideali.
6. Si ha che $R \cong \mathbf{Z}[X]/(7, X^2-2) \cong \mathbf{Z}_7[X]/(X^2-\overline{2})$. Nell'anello $\mathbf{Z}_7[X]$ abbiamo che $X^2-\overline{2} = (X-\overline{3})(X+\overline{3})$. Il teorema cinese del resto implica quindi che $R \cong \mathbf{Z}_7[X]/(X-\overline{3}) \times \mathbf{Z}_7[X]/(X+\overline{3}) \cong \mathbf{Z}_7 \times \mathbf{Z}_7$. Ne segue che $R^* \cong \mathbf{Z}_7^* \times \mathbf{Z}_7^*$ ha cardinalità $6 \times 6 = 36$.