1. Sia R un anello e sia $a \in R$. Dimostrare: se $ab = b$ per ogni $b \in R$ allora $a = 1$.

2. Sia R un anello e sia $a \in R$ un elemento invertibile. Siano $b, c \in R$. Dimostrare che se $ba = ca$, allora $b = c$. Dedurne che a ha un unico inverso moltiplicativo.

3. (*Anello di Boole*) Sia X un isieme e sia $P(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X. Definiamo per $A, B \in P(X)$
$$A + B = A\Delta B \ (= \ A \cup B - A \cap B),$$
$$A \cdot B = A \cap B.$$
Dimostrare che con quest'addizione e moltiplicazione $P(X)$ diventa un anello commutativo.

4. Sia R un anello commutativo. Un elemento $a \in R$ si dice *divisore di zero* se $a \neq 0$ e se esiste $b \in R$ diverso da zero con $ab = 0$.
   (a) dimostrare che un campo non possiede divisori di zero.
   (b) Determinare i divisori di zero di $\mathbf{Z}_{12}$.
   (c) Se R è finito, dimostrare che ogni $x \in R$ o è 0, o è un divisore di zero oppure è invertibile.

5. Siano R_1 e R_2 anelli. Dimostrare che $(R_1 \times R_2)^* = R_1^* \times R_2^*$.

6. Sia $\mathbf{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss. Siano $a, b \in \mathbf{Z}$ e sia $z = a + bi \in \mathbf{Z}[i]$. Far vedere che z è invertibile se e soltanto se $a^2 + b^2 = 1$. Calcolare $\mathbf{Z}[i]^*$.

7. Sia $m \in \mathbf{Z}$. Supponiamo che m non sia un quadrato in $\mathbf{Z}$.
   (a) Dimostrare: l'insieme
$$\mathbf{Z}[\sqrt{m}] = \{a + b\sqrt{m} : \ a, b \in \mathbf{Z}\}$$
   è un sottoanello di $\mathbf{C}$.
   (b) Sia $m = 7$. Esibire un elemento invertibile $\varepsilon \neq \pm 1$ nell'anello $\mathbf{Z}[\sqrt{7}]$. (Sugg. Verificare che $a + b\sqrt{7}$ è invertibile se e soltanto se $(a + b\sqrt{7})(a - b\sqrt{7}) = a^2 - 7b^2$ è uguale a ± 1)

8. Un *dominio* è un anello commutativo privo di divisori di zero.
   (a) Dimostrare che $\mathbf{Z}_n$ è un dominio se e solo se n è primo
   (b) Dimostrare: se R è un dominio, anche $R[X]$ lo è.

9. Sia $f : R_1 \longrightarrow R_2$ un omomorfismo. Far vedere che l'immagine di f è un sottoannello di R_2.

10. Sia R un anello. Far vedere che esiste unico un omomorfismo di anelli $\mathbf{Z} \longrightarrow R$. Far vedere che esiste unico un omomorfismo di anelli $R \longrightarrow \{0\}$. Qua $\{0\}$ indica l'anello zero.

11. Sia $f : R \longrightarrow R'$ un omomorfismo di anelli.
   (a) Dimostrare che f manda R^* in ${R'}^*$ e l'applicazione $f^* : R^* \longrightarrow {R'}^*$, data da $f^*(\varepsilon) = f(\varepsilon)$, è un omomorfismo di gruppi.
   (b) Dimostrare che f^* è iniettivo se f è iniettivo.
   (c) È vero che f^* è suriettivo se f è suriettivo?

12. (a) Sia $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che f è l'applicazione identica.
   (b) Sia $f : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che f è l'applicazione identica.
   (c) Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che $f(x) > 0$ se $x > 0$ e quindi per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha che $f(x) > f(y)$ se $x > y$..
   (d) Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ un omomorfismo di anelli. Far vedere che f è l'applicazione identica.

13. Dimostrare che per nessun anello R il gruppo addittivo è isomorfo a $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.