1. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che $\ker f$ è un sottogruppo normale di G. È sempre vero che l'immagine di f è un sottogruppo normale di H?
2. Siano H_1 e H_2 due sottogruppi normali di un gruppo G. Dimostrare che $H_1 \cap H_2$ è anche un sottogruppo normale di G
3. Sia G un gruppo e siano H, H' due sottogruppi normali di G con la proprietà che G/H e G/H' sono abeliani. Dimostrare che $G/(H \cap H')$ è abeliano.
4. Siano G_1 e G_2 due gruppi con elementi neutri e_1 respettivamente e_2. Dimostrare che $G_1 \times \{e_2\}$ e $\{e_1\} \times G_2$ sono sottogruppi normali di $G_1 \times G_2$.
5. Sia G un gruppo. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.
   (a) H è un sottogruppo di G
   (b) $H \neq \emptyset$ e $ab^{-1} \in H$ per ogni $a, b \in H$.
   (c) $H \neq \emptyset$ e H è un gruppo con composizione la restrizione della composizione di G.
6. Sia G un gruppo e sia $H' \subset G$ un sottogruppo di G. Sia $H \subset H'$ un sottogruppo di H'. Dimostrare che H è un sottogruppo di G.
7. Esibire un gruppo G e due sottogruppi $H \subset H' \subset G$ tali che H è un sottogruppo normale di H' e H' è un sottogruppo normale di G, ma H non è un sottogruppo normale di G. (Sugg. esibire sottogruppi opportuni di $G = D_4$.)
8. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo suriettivo di gruppi e sia $N \subset H$ un sottogruppo normale di H. Dimostrare che $f^{-1}(N)$ è un sottogruppo normale di G e che la mappa $G/f^{-1}(N) \longrightarrow H/N$ definita da $f(\overline{g}) = f(g) \pmod{N}$ è un isomorfismo ben definito.
9. Sia A un gruppo abeliano finito moltiplicativo e sia a il prodotto di tutti gli elementi di A.
   (a) Dimostrare che se A contiene un unico elemento b di ordine 2, allora $a = b$. Dimostrare che in caso contrario si ha che $a = 1$.
   (b) (Wilson) Sia p un primo. Dimostrare che $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
10. Per $F = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$ scriviamo F^{*2} per l'insieme $\{x^2 : x \in F^*\}$ dei quadrati di F.
    (a) Dimostrare che F^{*2} è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo F^*.
    (b) Dimostrare che il quoziente $\mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*2}$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_2$. Dimostrare che $\mathbf{C}^*/\mathbf{C}^{*2}$ è il gruppo banale.
    (c) Dimostrare che $\mathbf{Q}^*/\mathbf{Q}^{*2}$ è un gruppo infinito.
11. Sia p un numero primo. Consideriamo il gruppo additivo finito $A = \mathbf{Z}_{p^3} \times \mathbf{Z}_p$. Sia $f : A \longrightarrow A$ l'applicazione data da

$$f(a) \;=\; p^2 a \;=\; \underbrace{a + a + \ldots + a}_{p^2 \text{ volte}}, \qquad \text{per } a \in A.$$

    (a) Dimostrare che f è un omomorfismo.
    (b) Dimostrare che $\operatorname{im} f \subset \ker f$.
    (c) Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\ker f/\operatorname{im} f$?