1. Sia G un gruppo ciclico *infinito*. Dimostrare che G è isomorfo al gruppo additivo $\mathbf{Z}$.
2. Sia G un gruppo e sia $g \in G$. Sia $f : \mathbf{Z} \longrightarrow G$ l'applicazione definita da $f(n) = g^n$. Dimostrare che f è un omomorfismo e descrivere il nucleo e l'immagine in termini di proprietà dell'elemento g.
3. Sia G il gruppo di Klein $\{e, a, b, c\}$. Determinare le classi laterali dei sottogruppi $H_1 = \{e, a\}$, $H_2 = \{e, b\}$ e $H_3 = \{e, c\}$.
4. Dimostrare che per ogni sottogruppo H di $\mathbf{Z}$ esiste $n \in \mathbf{Z}$ tale che $H = \{kn : k \in \mathbf{Z}\}$. Dimostrare che per $n \neq 0$ si ha che $\mathbf{Z}/H = \mathbf{Z}_n$. Determinare la struttura di $\mathbf{Z}/H$ quando $n = 0$.
5. Sia $m \in \mathbf{Z}_{>0}$. Dimostrare che per ogni sottogruppo H di $\mathbf{Z}_m$ esiste un divisore d di m tale che $H = \{\overline{a} \in \mathbf{Z}_m : d \text{ divide } a\}$. Enumerare i sottogruppi di $\mathbf{Z}_{12}$.
6. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{C}/\mathbf{R}$ è isomorfo a $\mathbf{R}$.
7. Sia $H \subset \mathbf{Z}_{31}^*$ il sottogruppo generato da $\overline{2}$.
   (a) Quanti elementi ha H? Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{31}^*/H$?
   (b) Dimostrare che $\mathbf{Z}_{31}^*/H$ è ciclico.
8. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{R}^*/\{+1, -1\}$ è isomorfo al gruppo additivo $\mathbf{R}$.
9. Dimostrare che un sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico. Dimostrare che un quoziente di un gruppo ciclico è ciclico.
10. Sia G un gruppo. Sia $e \in G$ l'elemento neutro.
    (a) Sia $H = G$. Dimostrare che G/H è il gruppo banale.
    (b) Sia $H = \{e\}$. Dimostrare che G/H è isomorfo a G.
11. Sia $G = \mathbf{Z}_{20}^*$.
    (a) Sia H il sottogruppo generato da $\overline{9}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
    (b) Sia H il sottogruppo generato da $\overline{19}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
12. Sia $G = \mathbf{Z}_{32}^*$.
    (a) Sia H il sottogruppo generato da $\overline{25}$ e $\overline{31}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
    (b) Sia H il sottogruppo generato da $\overline{5}$ e $\overline{9}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
13. Sia G il gruppo moltiplicativo $\mathbf{C}^*$ e sia $H = \{z \in \mathbf{C}^* : |z| = 1\}$.
    (a) Dimostrare che H è un sottogruppo di $\mathbf{C}^*$.
    (b) Chi sono le classi laterali di H?
    (c) Dimostrare che il gruppo $\mathbf{C}^*/H$ é isomorfo al gruppo additivo $\mathbf{R}$.
14. Sia G il gruppo $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_8$ e sia H il sottogruppo generato dall'elemento v. Nei seguenti casi determinare l'ordine di v e determinare la struttura del gruppo quoziente G/H.
    (a) $v = (\overline{0}, \overline{2})$; (b) $v = (\overline{1}, \overline{0})$; (c) $v = (\overline{1}, \overline{2})$.