1. Sia G un gruppo finito di cardinalità n.
   (a) Dimostre che G è ciclico se e solo se contiene un elemento di ordine n.
   (b) Dimostrare che se n è primo, allora G è necessariamente ciclico.

2. Sia $n = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$. Dimostrare che $\overline{x}^{n-1} = \overline{1}$ per ogni elemento $\overline{x}$ di $\mathbf{Z}_n^*$. Stessa domanda per $n = 1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$.

3. Sia n un numero naturale che soddisfa $\mathrm{mcd}(n, 10) = 1$. Dimostrare che la lunghezza del periodo dell'espansione decimale della frazione $1/n$ è uguale all'ordine di $\overline{10}$ nel gruppo $\mathbf{Z}_n^*$.

4. Dimostrare che le seguenti applicazioni sono sono omomorfismi ben definiti:
   (a) $\mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}^*$ $\quad x \mapsto |x|$,
   (b) $\mathbf{Z}_{10} \longrightarrow \mathbf{Z}_5$ $\quad x \pmod{10} \mapsto x \pmod 5$,
   (c) $\mathbf{Z}_{10}^* \longrightarrow \mathbf{Z}_5^*$ $\quad x \pmod{10} \mapsto x \pmod 5$,
   (d) $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}^*$ $\quad x \mapsto \cos(x) + \mathrm{sen}(x)i$,
   (e) $\mathbf{Z}_4 \longrightarrow \mathbf{Z}_5^*$ $\quad x \mapsto 2^x$.
   (f) $\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{R}^*$ $\quad a + bi \mapsto a^2 + b^2$,
   Quali sono iniettive e quali suriettive? Determinare i nuclei e le immagini.

5. Siano G, G' gruppi e sia $f : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo. Dimostrare
   (a) Se H è un sottogruppo di G allora $f(H) = \{f(h) : h \in H\}$ è un sottogruppo di G'.
   (b) Se H è un sottogruppo di G' allora $f^{-1}(H) = \{h \in G : f(h) \in H\}$ è un sottogruppo di G.

6. Sia G un gruppo *finito* e sia $H \subset G$. Provare: se $H \neq \emptyset$ e se $ab \in H$ per ogni $a, b \in H$, allora H è un sottogruppo di G.

7. Sia G un gruppo e sia $g \in G$.
   (a) Dimostrare che l'applicazione data da $x \mapsto gxg^{-1}$ è un automorfismo di G.
   (b) Sia $H \subset G$ un sottogruppo. Dimostrare che $gHg^{-1} = \{gxg^{-1} : x \in H\}$ è un sottogruppo di G.

8. Sia G un gruppo. Dimostrare che l'applicazione $F : G \longrightarrow G$ data da $F(x) = x^2$ è un omomorfismo se e soltanto se G è abeliano. Dimostrare che l'applicazione $x \mapsto x^{-1}$ è un omomorfismo se e soltanto se G è abeliano.

9. Provare che ci sono isomorfismi
$$\mathbf{Z}_{12}^* \cong D_2 \cong P(X)$$
   dove $P(X)$ è l'insieme delle parti di $X = \{0, 1\}$ con composizione la differenza simmetrica.

10. Sia $n \geq 2$ e sia f l'applicazione che ad un elemento del gruppo diedrale D_n associa la permutazione indotta sugli n vertici del poligono regolare standard.
    (a) Dimostrare che f è un omomorfismo $D_n \longrightarrow S_n$.
    (b) Dimostrare che f è iniettiva per $n \geq 3$.
    (c) Dimostrare che f è un isomorfismo se e solo se $n = 3$.

11. Sia G un gruppo e siano H e H' due sottogruppi con le seguenti proprietà:
    – $hh' = h'h$ per ogni $h \in H$, $h' \in H'$,
    – $H \cap H' = \{e\}$,
    – Per ogni $g \in G$ ci sono $h \in H$ e $h' \in H'$ tali che $g = hh'$.
    Dimostrare che l'applicazione
$$f : H \times H' \longrightarrow G$$
    data da $f(h, h') = hh'$ è un isomorfismo.

12. Dimostrare che
$$\mathbf{R}^* \cong \mathbf{R}_{>0} \times \{\pm 1\}.$$
    (Sugg. utilizzare l'esercizio precedente.)