1. Sia R un anello commutativo. Dimostrare che
$$I = \{f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots \in R[X] : a_0 = a_1 = a_2 = 0\}$$
è un ideale di $R[X]$.

2. Scrivere il polinomio $(X^2+1)(Y^2+1)(Z^2+1)$ come polinomio nei polinomi simmetrici elementari $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{Z}[X, Y, Z]$.

3. Determinare le cardinalità dei seguenti anelli:
   (a) $\mathbf{Z}[X]/(X^3 + X + 1, X - 1, 3)$;
   (b) $\mathbf{Z}[X, Y]/(Y^2 - X, Y - 3X, X - 2)$;
   (c) $\mathbf{Z}_3[X, Y, Z]/(Y^2 - X^2, Y - Z^3, X - Z)$;
   (d) $\mathbf{Z}[i]/(12 - i, 29)$.

4. Determinare $\#R^*$ per l'anello $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-2}]/(3)$. Stessa domanda per gli anelli $\mathbf{Z}[i]/(4)$ e $\mathbf{Z}_5[X]/(X^3 - 1)$.

5. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato dai polinomi $X^2 - 1$ e $X^2 + 1$. Quanti sono gli elementi invertibili dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I$?

6. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X, Y]$ l'ideale generato generato da $X^2 - Y$, $Y - 1$ e 3. Calcolare la cardinalità del gruppo degli elementi invertibili del anello quoziente $\mathbf{Z}[X, Y]/I$.

7. Sia $\mathbf{R}$ il campo dei numeri reali e sia A l'anello $\mathbf{R}[X]/(X^2)$. Sia $\phi : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R} \times A$ l'applicazione data da $\phi(g) = (g(1), \overline{g})$ per $g \in \mathbf{R}[X]$. Qua $\overline{g} \in A$ indica la classe modulo X^2 di g.
   (a) Dimostrare che ϕ è un omomorfismo suriettivo di anelli.
   (b) Esibire un generatore del nucleo di ϕ.

8. Sia R un anello commutativo. Un elemento $e \in R$ si dice *idempotente* se $e^2 = e$.
   (a) Determinare gli elementi idempotenti degli anelli $\mathbf{Z}_6$ e di $\mathbf{Z}_9$.
   (b) Sia k un campo e sia $n \geq 1$. Determinare gli elementi idempotenti dell'anello k^n.
   (c) Dimostrare che se $e \in R$ è idempotente, anche $1 - e$ è idempotente.
   (d) Dimostrare che l'insieme E degli elementi idempotenti di R formano un gruppo con l'operazione $e * f = (e - f)^2$ per $e, f \in E$.

9. Un elemento x di un anello R si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per un $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$.
   (a) Determinare gli elementi nilpotenti degli anelli $\mathbf{Z}_6$ e $\mathbf{Z}_{24}$.
   (b) Dimostrare che gli elementi nilpotenti di un anello commutativo R formano un ideale.

10. Sia R un anello comutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi (questo vuol dire che $I + J = R$). Dimostrare che per ogni $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ gli ideali I^n e J^n sono anche coprimi.

11. Sia R un anello e supponiamo che l'applicazione $f : R \longrightarrow R$ data da $f(x) = x^2$ sia un omomorfismo di anelli.
    (a) Dimostrare che R è un anello commutativo.
    (b) Dimostrare che per ogni $x \in R$ si ha $x + x = 0$.
    (c) Dimostrare che se $x \in \ker(f)$, allora $1 + x \in R^*$.