1. Per $n = 24$, 63, 100 e 1000 scrivere $\mathbf{Z}_n^*$ come prodotto di gruppi ciclici.
2. L'*esponente* di un gruppo G è il più piccolo intero $m > 0$ tale che $g^m = e$ per ogni $g \in G$. Determinare l'esponente di V_4, S_4, $\mathbf{Z}_{37}^*$, $\mathbf{Z}_{24}^*$ e $\mathbf{Z}_{504}^*$.
3. Sia $f : \mathbf{Z}_{39}^* \longrightarrow \mathbf{Z}_{39}^*$ l'applicazione data da $f(x) = x^6$ per $x \in \mathbf{Z}_{39}^*$.
   (a) Dimostrare che f è un omomorfismo di gruppi e che $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$.
   (b) Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\ker(f)/\mathrm{im}(f)$?
4. Sia $G = \mathbf{Z}_{33}^*$ e sia H il sottogruppo generato da $\overline{4}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
5. Quanti omomorfismi dal gruppo simmetrico S_3 al gruppo $\mathbf{Z}_4$ ci sono?
6. Sia G il gruppo additivo $\mathbf{Z}_{12}$ e sia H il gruppo moltiplicativo $\mathbf{Z}_{12}^*$. Quanti omomorfismi $G \longrightarrow H$ ci sono? Quanti omomorfismi $H \longrightarrow G$ ci sono?
7. Dimostrare che ogni sottogruppo di un gruppo ciclico G è caratteristico in G.
8. Sia G un gruppo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale di cardinalità 2. Dimostrare che N è contenuto nel centro $Z(G)$ di G.
9. Sia G un gruppo con la proprietà che $G/Z(G)$ è ciclico. Dimostrare che G è abeliano.
10. Sia $n > 1$ e siano σ, τ due permutazioni in S_n.
    (a) Dimostrare che se σ è un k-ciclo, anche $\tau\sigma\tau^{-1}$ lo è.
    (b) Dimostrare che se σ è un prodotto di t cicli disgiunti di lunghezze $a_1, a_2, \ldots, a_t$, allora anche $\tau\sigma\tau^{-1}$ lo è.
    (c) Dimostrare che $\sigma\tau$ è un prodotto di t cicli disgiunti di lunghezze $a_1, a_2, \ldots, a_t$ se e solo se $\tau\sigma$ lo è.
11. Dimostrare che S_5 contiene un elemento di ordine 6. Esibire $n > 1$ tale che il gruppo simmetrico S_n contiene un elemento di ordine almeno n^2.
12. Stabilire se il gruppo alternante A_4 è isomorfo o meno al gruppo diedrale D_6. Spiegare la risposta.
13. Dimostrare che per nessun $n \geq 3$ i gruppi S_n e $A_n \times \mathbf{Z}_2$ sono isomorfi.
14. Sia G un gruppo finito con la proprietà che $\mathrm{Aut}(G)$ è banale.
    (a) Dimostrare che G è abeliano;
    (b) Dimostrare che ogni elemento di G ha ordine ≤ 2;
    (c) Dimostrare che $\#G = 1$ oppure 2.
15. Dimostrare che ogni numero naturale n con $\mathrm{mcd}(n, 10) = 1$ divide un numero della forma $11111\ldots11111$ (per esempio, 37 divide 111; sugg: prima dimostrare che n divide un numero della forma $9999\ldots9999$).
16. Sia p un primo e sia $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Determinare l'ordine del gruppo $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$ delle matrici $n \times n$ invertibili con coefficienti in $\mathbf{Z}_p$.