

1. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che se H è abeliano, allora il sottogruppo $[G, G]$ dei commutatori è contenuto in $\ker(f)$.
2. Sia G un gruppo e sia $H \subset G$ un sottogruppo che contiene il sottogruppo $[G, G]$ dei commutatori. Dimostrare che H è un sottogruppo normale e che G/H è un gruppo abeliano.
3. Sia G un gruppo e siano H, H' due sottogruppi normali di G con la proprietà che G/H e G/H' sono abeliani. Dimostrare che $G/(H \cap H')$ è abeliano.
4. Sia $n \geq 2$. Determinare il centro e il sottogruppo dei commutatori del gruppo diedrale D_n .
5. Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice *caratteristico* se $\sigma(H) = H$ per ogni automorfismo $\sigma \in \text{Aut}(G)$. Dimostrare:
 - (a) i sottogruppi $Z(G)$ e $[G, G]$ sono caratteristici;
 - (b) un sottogruppo caratteristico di G è normale in G ;
 - (c) se $H \subset N \subset G$ sono sottogruppi tali che H è caratteristico in N e N è normale in G , allora H è un sottogruppo normale di G ;
 - (d) dimostrare che l'affermazione della parte (c) non è vera in generale se H è soltanto un sottogruppo normale di N .
6. Determinare tutti gli omomorfismi
 - (a) $\mathbf{Z}_6 \longrightarrow \mathbf{Z}_4$;
 - (c) $\mathbf{Z}_6 \longrightarrow S_3$;
 - (e) $\mathbf{Z}_8 \longrightarrow D_4$;
 - (b) $S_3 \longrightarrow D_4$;
 - (d) $D_4 \longrightarrow \mathbf{Z}_8$;
 - (f) $V_4 \longrightarrow V_4$.
7. Siano $n, m \geq 1$ e sia $f : S_n \longrightarrow S_m$ un omomorfismo. Dimostrare che $f(A_n) \subset A_m$.

8. (a) Ecco il famoso puzzle di *Sam Loyd* (statunitense noto per i suoi rompicapo, 1841–1911). Ci sono 15 blocchetti, numerati da 1 a 15, in un telaio. Utilizzando l'unica posizione vuota, essi si possono spostare orizzontalmente o verticalmente. Lo scopo del gioco è di ordinare i blocchetti da 1 a 15 per righe. Far vedere che questo è *impossibile* a partire dalla configurazione rappresentata a destra.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

- (b) Lo stesso gioco come in (a). È incredibile, ma nonostante le affermazioni della parte (a) di questo esercizio, in Trentino sanno ordinare i blocchetti cominciando dalla configurazione rappresentata a destra. Come mai?

(http://en.wikipedia.org/wiki/15_puzzle)

33	tren	tini	an
da	va	no	per
Trento	tut	ti	33
trot	do	tan	