1. Siano R_1 ed R_2 due anelli commutativi.
   (a) Siano $I_1 \subset R_1$ e $I_2 \subset R_2$ ideali. Dimostrare che $I_1 \times I_2$ è un ideale di $R_1 \times R_2$.
   (b) Dimostrare che ogni ideale $I \subset R_1 \times R_2$ ha la forma $I = I_1 \times I_2$ dove $I_1 \subset R_1$ e $I_2 \subset R_2$ sono ideali.

2. Sia R un anello e siano $I, J \subset R$ due ideali di R. Dimostrare che $I \cup J$ è un ideale se e soltanto se $I \subset J$ oppure $J \subset I$.

3. (a) Dimostrare che la mappa $\Psi : \mathbf{Z}[X] \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ data da $f \mapsto f(0) \pmod 2$ è un omomorfismo di anelli suriettivo.
   (b) Dimostrare che $\ker(\Psi)$ è l'ideale $(2, X)$.
   (c) Dimostrare che c'è un isomorfismo
$$\mathbf{Z}[X]/(2, X) \cong \mathbf{Z}_2$$

4. Dimostrare che l'ideale (X, Y) dell'anello $\mathbf{Q}[X, Y]$ non è principale.

5. Dimostrare che ognuno degli anelli quozienti $\mathbf{Z}[X]/(5, X-2)$, $\mathbf{Z}[X]/(5, 2X-2)$ e $\mathbf{Z}[X]/(5, X-2, X^2+1)$ è un campo di 5 elementi.

6. (a) Dimostrare che l'anello $\mathbf{Z}[i]/(2+i)$ è isomorfo al campo $\mathbf{Z}_5$.
   (b) Dimostrare che l'anello $\mathbf{Z}[i]/(3)$ è un campo di 9 elementi.

7. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbf{Z}[i]$, determinare il resto della divisione di $5+14i$ per $3+5i$. (Sarebbe meglio dire: "un" resto ...). Determinare $\mathrm{mcd}(5+14i, 3+5i)$.

8. Sia R il sottoanello di $\mathbf{C}$ dato da $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbf{Z}\}$. Sia $N : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ l'applicazione data da $N(x) = x\overline{x}$.
   (a) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbf{C}$ esiste $y \in R$ tale che $|N(x-y)| \leq \frac{3}{4}$.
   (b) Dimostrare che $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ è un dominio Euclideo.

9. Siano R e K i sottoanelli del campo $\mathbf{R}$ dei numeri reali, dati rispettivamente da $R = \mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Z}\}$ e $K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Q}\}$. Sia $N : K \longrightarrow \mathbf{Q}$ l'applicazione data da $N(a + b\sqrt{2}) = |(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})| = |a^2 - 2b^2|$.
   (a) Dimostrare che K è isomorfo al campo quoziente di R.
   (b) Dimostrare che $N(xy) = N(x)N(y)$ per ogni $x, y \in K$.
   (c) Dimostrare che per ogni $x \in K$ esiste $y \in R$ tale che $N(x-y) \leq \frac{1}{2}$.
   (d) Dimostrare che $R = \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ è un dominio Euclideo rispetto alla funzione N.

10. Dimostrare che il sottoanello di $\mathbf{C}$ dato da $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbf{Z}\}$ non è un dominio ad ideali principali.

11. Sia $\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \in \mathbf{C}$. Allora si ha che $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$. Sia R l'anello dato da $\mathbf{Z}[\zeta] = \{a + b\zeta : a, b \in \mathbf{Z}\}$.
   (a) Dimostrare che R è un anello Euclideo rispetto alla funzione $N : (R - \{0\}) \longrightarrow \mathbf{Z}_{\geq 1}$ data da $N(x) = x\overline{x}$.
   (b) Sia p un numero primo diverso da 3. Dimostrare che $p = x^2 + xy + y^2$ per certi $x, y \in \mathbf{Z}$ se e solo se $p \equiv 1 \pmod 3$.