

COGNOME

NOME

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Se esiste, costruire una biezione fra $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R} - \{0\}$.
2. Sia G un gruppo. Dimostrare che l'applicazione $F : G \longrightarrow G$ data da $F(x) = x^2$ è un omomorfismo se e soltanto se G è abeliano.
3. Determinare tutte le soluzioni $x \in \mathbf{Z}$ del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 10x \equiv 2 \pmod{24}, \\ 21x \equiv -3 \pmod{54}. \end{cases}$$

4. Sia $G = \mathbf{Z}_{51}^*$ e sia H il sottogruppo generato dalla classe $\bar{2}$. Determinare la cardinalità del gruppo quoziente G/H e stabilire se G/H è ciclico o meno.
5. Consideriamo elementi del gruppo simmetrico S_{10} .
 - (a) Scrivere il prodotto $(5\ 6\ 7\ 8)(1\ 2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5\ 6\ 9\ 10)$ come prodotto di cicli disgiunti.
 - (b) Determinare l'ordine della permutazione $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8\ 9\ 10)$.
 - (c) Esibire un elemento di S_{10} di ordine più grande possibile.
6. Sia G un gruppo commutativo e sia $H = \{x \in G : \text{l'ordine di } x \text{ è finito}\}$.
 - (a) Dimostrare che H è un sottogruppo di G .
 - (b) Dimostrare che, a parte il suo elemento neutro, il gruppo quoziente G/H non contiene elementi di ordine finito.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 4 del foglio 2.
2. Questo è l'esercizio 8 del foglio 6.
3. Poiché $\text{mcd}(10, 24)$ divide 2, le soluzioni della prima congruenza hanno la forma $x = 5 + 12k$ per $k \in \mathbf{Z}$. Sostituendo nella seconda congruenza troviamo che $21(5 + 12k) \equiv -3 \pmod{54}$ e quindi $36k \equiv 0 \pmod{54}$. Poiché $\text{mcd}(36, 54) = 18$, abbiamo che $k \equiv 0 \pmod{3}$. Le soluzioni del sistema sono quindi $\{5 + 36k : k \in \mathbf{Z}\}$.
4. Il gruppo G ha $\varphi(51) = 32$ elementi. Il sottogruppo $H = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{16}, \bar{32}, \bar{13}, \bar{26}\}$ ha cardinalità 8. Il quoziente G/H ha $32/8 = 4$ elementi ed è ciclico. La ciclicità segue dal fatto che la classe laterale $\bar{5}H$ è un generatore di G/H : per il teorema di Lagrange, l'ordine dell'elemento $\bar{5}H$ di G/H divide 4. Il quadrato $(\bar{5}H)^2 = \bar{25}H$ non è l'elemento neutro di G/H , perché $\bar{25} \notin H$. Ne segue che la classe $\bar{5}H$ ha ordine uguale a 4 ed è quindi un generatore di G/H .
5. (a) Si ha che $(5\ 6\ 7\ 8)(1\ 2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5\ 6\ 9\ 10) = (1\ 2\ 3)(4\ 6\ 9\ 10)(5\ 7\ 8)$.
 (b) L'ordine di σ è uguale al mcm delle lunghezze dei due cicli disgiunti, vale a dire $\text{mcm}(4, 5) = 20$.
 (c) La permutazione $(1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10)$ ha ordine $\text{lcm}(2, 3, 5) = 30$. In S_{10} non esistono elementi di ordine più grande.
6. (a) L'elemento neutro e sta in H . Se $a \in H$ anche $a^{-1} \in H$. Se a, b appartengono ad H , allora esistono interi $n, m > 0$ con $a^n = e$ e $b^m = e$. Poiché G è commutativo si ha che $(ab)^{nm} = (a^n)^m (b^m)^n = e^m e^n = e$ e quindi anche ab sta in H . Concludiamo che H è un sottogruppo di G .
 (b) Sia $a \in G$ e supponiamo che la classe laterale aH sia un elemento di ordine finito di G/H . Allora $(aH)^k = a^k H = H$ per qualche $k > 0$. Questo vuol dire che a^k sta in H e ha quindi ordine finito in G . Esiste quindi $l > 0$ con $(a^k)^l = e$. Questo implica che l'elemento a stesso ha anche ordine finito in G ed appartiene quindi ad H . Ma allora si ha che $aH = H$. Ne segue che la classe laterale aH è l'elemento neutro di G/H , come richiesto.