

COGNOME

NOME

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Se esiste, costruire una biezione fra $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R} - \{0\}$.
2. Sia H il sottogruppo del gruppo simmetrico S_4 generato dalle permutazioni $(1\ 2\ 3\ 4)$ e $(1\ 4)(2\ 3)$. Determinare la cardinalità di H .
3. Sia R un anello e siano $I, J \subset R$ due ideali di R . Dimostrare che $I \cup J$ è un ideale se e soltanto se $I \subset J$ oppure $J \subset I$.
4. Sia R l'anello $\mathbf{Z}[i]/(8-i)$.
 - (a) Determinare $\#R$.
 - (b) Determinare $\#R^*$.
5. Sia H il sottogruppo di $\mathbf{Z}_{32}^*$ generato da $\bar{7}$ e sia $G = \mathbf{Z}_{32}^*/H$.
 - (a) Determinare la cardinalità di G .
 - (b) Determinare l'ordine dell'elemento $\overline{-7}H$ di G .
6. Sia $C(\mathbf{R})$ l'anello delle funzioni continue $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. La somma $f + g$ di $f, g \in C(\mathbf{R})$ è quindi definita da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e il prodotto da $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
 - (a) Dimostrare che $I = \{f \in C(\mathbf{R}) : f(0) = 0\}$ è un ideale di $C(\mathbf{R})$.
 - (b) Dimostrare che l'anello quoziente $C(\mathbf{R})/I$ è isomorfo a $\mathbf{R}$.
 - (c) Dimostrare che $I^2 = I$.

Soluzioni.

1. Questo è il primo esercizio del primo esonero.
2. Il sottogruppo generato dalla permutazione $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$ ha ordine 4. La permutazione $\tau = (1\ 4)(2\ 3)$ ha ordine 2 e soddisfa $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$ e quindi $\tau\sigma = \sigma^3\tau$. Questo dimostra che ogni elemento di H ha la forma $\sigma^i\tau^j$ per qualche $0 \leq i \leq 3$ e $0 \leq j \leq 1$. Poiché tutti questi elementi sono distinti, il sottogruppo H ha $4 \cdot 2 = 8$ elementi.
Più concettualmente, si osserva che la solita azione del gruppo diedrale D_4 sul quadrato, induce una permutazione dei quattro vertici $\{1, 2, 3, 4\}$. L'omomorfismo $D_4 \rightarrow S_4$ è iniettivo e il suo immagine è il sottogruppo di S_4 generato da σ e τ , il quale ha quindi $8 = \#D_4$ elementi.
3. Questo è il terzo esercizio del compito del 2° appello.
4. Si ha che

$$\mathbf{Z}[i]/(8-i) \cong \mathbf{Z}[X]/(X^2+1, X-8) \cong \mathbf{Z}/(8^2+1) = \mathbf{Z}_{65}.$$

L'anello ha quindi 65 elementi e contiene $\phi(65) = 48$ elementi invertibili

5. Si verifica che l'ordine dell'elemento $\bar{7} \in \mathbf{Z}_{32}^*$ è 4. Il gruppo G ha quindi $\phi(32)/4 = 4$ elementi. Poiché $\overline{-7}$ non appartiene ad $H = \{\bar{1}, \bar{7}, \bar{17}, \bar{23}\}$, l'ordine di $\overline{-7}H$ in G non è certamente 1. Infatti, dal fatto che $(\overline{-7})^2 = \bar{17} \in H$ segue che l'ordine è 2.
6. L'applicazione $\phi : C(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ data da $\phi(f) = f(0)$ è un omomorfismo suriettivo di anelli. La parte (b) segue dal primo teorema di isomorfismo e dal fatto che $\ker \phi = I$.
Per dimostrare (c) sia $f \in I$. Allora $f = f_+ - f_-$ dove $f_+ = \max(f, 0)$ e $f_- = \max(-f, 0)$. Sia f_+ che f_- sono continue e appartengono a I . Sia g_+ la funzione data da $g_+(x) = \sqrt{f_+(x)}$ e sia g_- la funzione data da $g_-(x) = \sqrt{f_-(x)}$. Allora anche g_+ e g_- sono continue e appartengono ad I . Dalla formula $f = g_+^2 - g_-^2$ segue adesso che f sta in I^2 , come richiesto.