1. Scrivere $X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2$ come polinomio nei polinomi simmetrici elementari $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{Z}[X,Y,Z]$. Stessa domanda per $XY^3+YX^3+XZ^3+ZX^3+ZY^3+YZ^3$.
2. Scrivere il polinomio $(X^2+1)(Y^2+1)(Z^2+1)$ come polinomio nei polinomi simmetrici elementari $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{Z}[X,Y,Z]$.
3. Siano s_1, s_2 i due polinomi simmetrici elementari in $\mathbf{Z}[X,Y]$. Per $n \geq 1$ sia p_n il polinomio simmetrico $X^n + Y^n$.
   (a) Sia $n \geq 2$. Dimostrare che $p_{n+1} = s_1 p_n - s_2 p_{n-1}$.
   (b) Scrivere p_6 come polinomio in s_1 e s_2.
4. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7 \in \mathbf{C}$ tali che $X^7 + X + 2 = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_7)$.
   (a) Determinare $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_7$;
   (b) Dimostrare che $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \cdots + \alpha_7^3 = 0$;
   (c) Determinare $\alpha_1^7 + \alpha_2^7 + \cdots + \alpha_7^7$.
5. Sia $f \in \mathbf{Q}[X]$ di grado d e siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbf{C}$ gli zeri di f. Il *discriminante* $\Delta(f)$ di f è definito da
$$\Delta(f) = \prod_{1\leq i<j\leq d} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$
   Dimostrare che $\Delta(f)$ è un numero razionale.
6. Sia $\mathbf{R}$ il campo dei numeri reali e sia A l'anello $\mathbf{R}[X]/(X^2)$. Sia $\phi : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R} \times A$ l'applicazione data da $\phi(g) = (g(1), \overline{g})$, per $g \in \mathbf{R}[X]$. Qui $\overline{g} \in A$ indica la classe di g modulo X^2.
   (a) Dimostrare che ϕ è un omomorfismo suriettivo di anelli.
   (b) Esibire un generatore del nucleo di ϕ.
7. Sia $C(\mathbf{R})$ l'anello delle funzioni continue $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Dimostrare che le funzioni $f \in C(\mathbf{R})$ con supporto compatto formano un ideale.
   (La somma e il prodotto in $C(\mathbf{R})$ sono definiti come $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$, per $f, g \in C(\mathbf{R})$ e $x \in \mathbf{R}$. (Una funzione $f \in C(\mathbf{R})$ si dice *a supporto compatto* se esiste $M > 0$ tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ per cui $|x| > M$).
8. Sia R un anello commutativo. Un elemento $e \in R$ si dice *idempotente* se $e^2 = e$.
   (a) Determinare gli elementi idempotenti degli anelli $\mathbf{Z}_6$ e $\mathbf{Z}_9$.
   (b) Sia k un campo e sia $n \geq 1$. Determinare gli elementi idempotenti dell'anello $k \times k$.
   (c) Dimostrare che se $e \in R$ è idempotente, anche $1-e$ è idempotente.
   (d) Dimostrare che l'insieme E degli elementi idempotenti di R forma un gruppo con l'operazione $e * f = (e-f)^2$, per $e, f \in E$.
9. Un elemento x di un anello R si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per qualche $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$.
   (a) Determinare gli elementi nilpotenti degli anelli $\mathbf{Z}_6$ e $\mathbf{Z}_{24}$.
   (b) Dimostrare che gli elementi nilpotenti di un anello commutativo R formano un ideale.
10. Determinare le cardinalità dei seguenti anelli:
   (a) $\mathbf{Z}[X]/(X^3+X+1, X-1, 3)$;
   (b) $\mathbf{Z}[X,Y]/(Y^2-X, Y-3X, X-2)$;
   (c) $\mathbf{Z}_3[X,Y,Z]/(Y^2-X^2, Y-Z^3, X-Z)$;
   (d) $\mathbf{Z}[i]/(12-i, 29)$.