1. Un anello commutativo R si dice *Noetheriano* se ogni successione di ideali di R
$$I_1 \quad \subset \quad I_2 \quad \subset \quad I_3 \quad \subset \quad I_4 \quad \subset \quad \ldots$$
si stabilizza, cioè deve esistere n_0 tale che $I_n = I_{n_0}$ per ogni $n \geq n_0$. Dimostrare che R è Noetheriano se e solo se ogni ideale di R è generato da un insieme finito di elementi.

2. (a) Dimostrare che l'ideale $(X, 2)$ di $\mathbf{Z}[X]$ non è principale.
   (b) Dimostrare che l'ideale (X, Y) di $\mathbf{R}[X, Y]$ non è principale.

3. Fattorizzare il polinomio $X^6 - 1$ in $\mathbf{C}[X]$, $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Z}_3[X]$, $\mathbf{Z}_5[X]$.

4. Il polinomio *reciproco* di $f = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbf{Q}[X]$ (con a_0, a_n diversi da 0) è il polinomio $f^* = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} X^j \in \mathbf{Q}[X]$. Dimostare che f è irriducibile se e solo se f^* è irriducibile.

5. Sia $f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ un polinomio in $\mathbf{Z}[X]$. Sia $\alpha = p/q$ (dove $p, q \in \mathbf{Z}$ con $q \neq 0$ e $\mathrm{mcd}(p, q) = 1$) uno zero di f. Dimostrare che p divide a_0 e q divide a_n.

6. Fattorizzare i seguenti elementi dell'anello R in fattori irriducibili di R.
   (a) $X^2 - Y^2$ con $R = \mathbf{Q}[X, Y]$;
   (b) $X^3 + 4X^2 + 9X + 6$ con $R = \mathbf{Z}[X]$;
   (c) $3X^4 + X - 1$ con $R = \mathbf{Q}[X]$;
   (d) 247 con $R = \mathbf{Z}$.

7. Fattorizzare i seguenti elementi dell'anello R in fattori irriducibili di R.
   (a) $X^3 - Y^3$ con $R = \mathbf{Q}[X, Y]$;
   (b) $X^3 - X^2 - 8X + 6$ con $R = \mathbf{Z}[X]$;
   (c) $X^4 - X^2 + 4X + 3$ con $R = \mathbf{Q}[X]$;
   (d) $2i - 9$ con $R = \mathbf{Z}[i]$.

8. (a) Dimostrare che i polinomi $X^6 + X^3 + 1$ e $X^5 - 8$ sono irriducibili in $\mathbf{Q}[X]$. (Sugg. usare il criterio di Eisenstein.)
   (b) Dimostrare che $X^4 - X^2 + 1$ è un polinomio irriducibile in $\mathbf{Q}[X]$.

9. Decidere se il polinomio $X^5 + X^3 + 1$ è irriducibile o meno negli anelli $\mathbf{Z}_2[X]$, $\mathbf{Z}_3[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ e $\mathbf{R}[X]$.

10. Sia $f \in \mathbf{Z}[X]$ un polinomio monico.
    (a) Se $\alpha \in \mathbf{Q}$ è uno zero di f, allora $\alpha \in \mathbf{Z}$.
    (b) Supponiamo che $f(2) = 13$. Dimostrare che f ha al più tre zeri in $\mathbf{Q}$.
    (c) Esibire un polinomio f con tre zeri razionali e che soddisfa $f(2) = 13$.

11. Sia $\mathbf{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss.
    (a) Fattorizzare gli elementi $5 + i$ e $239 + i$ come prodotto di elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$.
    (b) Dedurre la formula classica che John Machin ha usato nel 1706 per calcolare a mano i primi 100 decimali di π:
$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}, \qquad \text{con} \quad \arctan x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

12. In questo esercizo determiniamo le soluzioni in $\mathbf{Z}$ dell'equazione $X^2 + 1 = Y^3$. Sia (x, y) una soluzione.
    (a) Dimostrare che x è un intero *pari*;
    (b) Dimostrare che gli elementi $x + i$ e $x - i$ di $\mathbf{Z}[i]$ hanno mcd uguale a 1;
    (c) Far vedere che $x + i$ è il cubo di un elemento $a + bi \in \mathbf{Z}[i]$;
    (d) Concludere che $(x, y) = (0, 1)$.