1. Siano R_1 e R_2 anelli. Dimostrare che $(R_1 \times R_2)^* = R_1^* \times R_2^*$.
2. Un *dominio* è un anello commutativo privo di divisori di zero.
   (a) Dimostrare che $\mathbf{Z}_n$ è un dominio se e solo se n è primo
   (b) Dimostrare: se R è un dominio, anche $R[X]$ lo è.
3. Sia $f : R_1 \longrightarrow R_2$ un omomorfismo. Dimostrare che l'immagine di f è un sottoanello di R_2.
4. Sia R un anello. Dimostrare che esiste unico un omomorfismo di anelli $\mathbf{Z} \longrightarrow R$. Dimostrare che esiste unico un omomorfismo di anelli $R \longrightarrow \{0\}$. Qua $\{0\}$ indica l'anello zero.
5. Sia R un anello. Sia $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}[X], R)$ l'insieme degli omomorfismi di anelli da $\mathbf{Z}[X]$ in R. Esisbire una biiezione naturale $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}[X], R) \leftrightarrow R$.
6. Siano R_1 ed R_2 due anelli.
   (a) Siano $I_1 \subset R_1$ e $I_2 \subset R_2$ ideali. Dimostrare che $I_1 \times I_2$ è un ideale di $R_1 \times R_2$.
   (b) Dimostrare che ogni ideale $I \subset R_1 \times R_2$ ha la forma $I = I_1 \times I_2$ dove $I_1 \subset R_1$ e $I_2 \subset R_2$ sono ideali.
7. Sia R un anello e sia $I \subset R$ un ideale. Dimostrare che ogni ideale di R/I ha la forma J/I per un ideale J di R che contiene I. Far vedere che l'ideale J è unico.
8. Sia R un anello commutativo e sia $R[[X]]$ l'anello delle serie di potenze con coefficienti in R. Dimostrare che $R[[X]]^* = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots \in R[[X]] : a_0 \in R^*\}$.
9. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi, vale a dire $I + J = R$. Dimostrare che per ogni $m \geq 1$ si ha che $I^m + J^m = R$.
10. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi.
   (a) Dimostrare che $IJ = I \cap J$;
   (b) (Teorema cinese del resto) Dimostrare che la mappa naturale
   $$R/IJ \longrightarrow R/I \times R/J$$
   è un isomorfismo di anelli.
   (c) Generalizzare la parte (b) a n ideali $I_1, \ldots, I_n$ coprimi a due a due.
11. Sia R un anello commutativo e sia $e \in R$ un elemente *idempotente*. Cioè, si ha che $e^2 = e$.
   (a) Dimostrare: anche $1 - e$ è idempotente.
   (b) Dimostrare: la mappa naturale $R \longrightarrow R/(e) \times R/(1-e)$ è un isomorfismo di anelli.
   (c) Determinare gli elementi idempotenti di $\mathbf{Z}_{100}$.
12. Sia R un anello commutativo. Un elemento $x \in R$ si dice *nilpotente* se
   $$x^N = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{N \text{ volte}} = 0 \quad \text{per un certo } N > 0.$$
   (a) Sia p un numero primo e sia $m \geq 1$. Far vedere che $\overline{p} \in \mathbf{Z}_{p^m}$ è nilpotente.
   (b) Caratterizzare i numeri $n \geq 1$ per cui l'unico elemento nilpotente di $\mathbf{Z}_n$ è $\overline{0}$.
   (c) Dimostrare che gli elementi nilpotenti formano un ideale di R.
13. (a) Sia R un dominio e siano $x, y \in R$ con $(x) = (y)$. Dimostrare che esiste $u \in R^*$ con $ux = y$.
   (b) Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato da $5X$ e X^2 e sia $R = \mathbf{Z}[X]/I$. Far vedere che R non è un dominio. Dimostare che gli ideali generati dagli elementi $\overline{X}$ e $\overline{2X}$ di R sono uguali, ma che *non* esiste nessuna unità $u \in R^*$ tale che $\overline{2X} = u\,\overline{X}$.
14. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali. Dimostrare che si ha l'inclusione $(I + J)(I \cap J) \subset IJ$. Vale sempre l'uguaglianza?