1. Sia G un gruppo con la proprietà che per ogni $a, b, c \in G$ gli elementi abc e cba sono coniugati. Dimostrare che G è abeliano.

2. Sia p un numero primo e sia q un divisore primo di $p-1$. Sia
$$G = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{Z}_p \text{ con } b^q = 1 \}.$$
   (a) Dimostrare che G è un sottogruppo non commutativo di $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ di ordine pq.
   (b) Dimostrare che G è isomorfo ad un prodotto semidiretto di H per $\mathbf{Z}_p$ dove H è l'unico sottogruppo di $\mathbf{Z}_p^*$ di ordine q.

3. Sia $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_3)$. Quanti elementi ha G? Determinare la struttura del 2-sottogruppo di Sylow di G.

4. Sia G un gruppo abeliano di ordine n. Dimostrare che per ogni divisore $m > 0$ di n, il gruppo G ammette un sottogruppo di ordine m.

5. Dimostrare che ogni gruppo di ordine 255 è ciclico.

6. Dimostrare che ogni gruppo di ordine 4225 è abeliano.

7. In questo esercizio dimostriamo che gruppi G di ordine 120 non possono essere semplici. Supponiamo quindi per assurdo che G sia un gruppo di cardinalità 120 e che gli unici sottogruppi normali di G siano $\{1\}$ e G stesso.
   (a) Dimostrare che G possiede sei 5-sottogruppi di Sylow.
   (b) Il gruppo G agisce tramite coniugio sull'insieme dei 5-sottogruppi di Sylow. Dimostrare che l'omomorfismo associato $G \longrightarrow S_6$ è iniettivo e che l'immagine è contenuta in A_6.
   (c) Dimostrare che A_6 non ha sottogruppi di indice 3 (sfruttare la semplicità di A_6).
   (d) Dedurre una contraddizione e concludere che G non può esistere.

8. Sia G un gruppo e sia $\phi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ la mappa che manda $g \in G$ nell'automorfismo ϕ_g dato da $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ per ogni $x \in G$. Sorprendentemente, il prodotto semidiretto $G \times_\phi G$ è *isomorfo* al prodotto cartesiano $G \times G$. Esibire un isomorfismo.

9. Sia G un gruppo finito e supponiamo che il 2-sottogruppo di Sylow di G sia ciclico.
   (a) Calcolare il segno della permutazione $G \longrightarrow G$ indotta dalla moltiplicazione a sinistra per un generatore di un 2-gruppo di Sylow.
   (b) Dimostare che G ammette un sottogruppo di indice 2 (e quindi G non è semplice).

10. Sia $n \geq 1$ e sia φ la funzione di Eulero.
   (a) Per $n = 77, 91$ e 345 calcolare $\mathrm{mcd}(n, \varphi(n))$. Dimostrare che per $n = 77, 91$ e 345 ogni gruppo di ordine n è ciclico.
   (b) Provare che se ogni gruppo di ordine n è ciclico, allora si ha che $\mathrm{mcd}(n, \varphi(n)) = 1$.
   (c) Se $\mathrm{mcd}(n, \varphi(n)) = 1$ allora si ha che $\mathrm{mcd}(m, \varphi(m)) = 1$ per ogni divisore m di n.
   (d)*Dimostrare il viceversa di (b). (dimostrare che se n non è primo, allora G ammette un sottogruppo normale diverso da $\{1\}$ e da G stesso e procedere per induzione).