0. Siano N e H due gruppi e sia $\phi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ un omomorfismo. Scriviamo ϕ_h per $\phi(h)$. Il *prodotto semidiretto* $N \times_\phi H$ *di* H *per* N *indotto da* ϕ è il prodotto cartesiano $N \times H$ dotato dalla struttura di gruppo data da
$$(n, h) \cdot (n', h') = (n\phi_h(n'), hh'), \qquad \text{per } (n, h) \in N \times H.$$
   (a) Verificare che con questa composizione $N \times_\phi H$ è un gruppo.
   (b) Dimostrare che l'applicazione $N \longrightarrow N \times_\phi H$ data da $n \mapsto (n, 1)$ è un omomorfismo e che l'immagine è un sottogruppo normale di $N \times_\phi H$.
   (c) Dimostrare che l'applicazione $H \longrightarrow N \times_\phi H$ data da $h \mapsto (1, h)$ è un omomorfismo. L'immagine è sempre un sottogruppo normale di $N \times_\phi H$?
   (d) Dimostrare che l'applicazione $N \times_\phi H \longrightarrow H$ data da $(n, h) \mapsto h$ è un omomorfismo. Determinarne il nucleo.

1. Sia ϕ l'unico omomorfismo suriettivo da $\mathbf{Z}_4$ ad $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_3)$. Sia B il prodotto semidiretto $\mathbf{Z}_3 \times_\phi \mathbf{Z}_4$ associato a ϕ.
   (a) Determinare gli elementi di ordine 2 di B.
   (b) Dimostrare che B non è isomorfo al gruppo diedrale D_6.

2. Sia p un primo e sia $n \geq 1$. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbf{Z}_p^n$. L'azione di un elemento σ del gruppo simmetrico S_n su V è data da $\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ per $(x_1, \ldots, x_n) \in V$.
   (a) Sia $W \subset V$ il sottoinsieme dei vettori $(x_1, \ldots, x_n)$ con $\sum_i x_i = 0$. Dimostrare che W è un sottogruppo di V e che S_n preserva W.
   (b) Sia $\phi : S_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(W)$ l'omomorfismo indotto dall'azione di S_n della parte (a). Quanti elementi ha il prodotto semidiretto $W \times_\phi S_n$?

3. Sia G un gruppo finito. Sia $G^{(0)} = G$ e per $n \geq 0$ sia $G^{(n+1)}$ il sottogruppo dei commutatori di $G^{(n)}$. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti
   (a) Per n sufficientemente grande si ha che $G^{(n)} = \{1\}$.
   (b) Il gruppo G ammette una serie di sottogruppi
$$\{1\} \subset \ldots \subset G_{n+1} \subset G_n \subset \ldots \subset G_1 \subset G_0 = G$$
   con la proprietà che per ogni $n \geq 0$ si ha che G_{n+1} è un sottogruppo normale di G_n con quoziente G_n/G_{n+1} abeliano.
   (c) come (b), ma ogni quoziente G_n/G_{n+1} è isomorfo a $\mathbf{Z}_p$ per un primo p (che dipende da n).

   Un gruppo G che gode di queste proprietà (equivalenti) si dice *risolubile.*

4. Sia G un gruppo finito.
   (a) Dimostrare che se G ha solo due classi di coniugio, allora $G \cong \mathbf{Z}_2$.
   (b) Dimostrare che se G ha tre classi di coniugio, allora $G \cong \mathbf{Z}_3$ oppure $G \cong S_3$.

5. Sia G un gruppo e sia $D = G'$ il suo sottogruppo dei commutatori. Sia $f : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(D)$ la mappa data da $x \mapsto \sigma_x$ dove $\sigma_x(h) = xhx^{-1}$ per ogni $h \in D$.
   (a) Dimostrare che $f(D)$ è contenuto nel sottogruppo $\mathrm{Aut}(D)'$ dei commutatori di $\mathrm{Aut}(D)$.
   (b) Dimostrare che $\mathrm{Inn}(D) \subset \mathrm{Aut}(D)'$.
   (c) Dimostrare che il gruppo simmetrico S_3 non può essere sottogruppo dei commutatori di nessun gruppo.
   (d)*Dimostrare che per $n \geq 3$ il gruppo simmetrico S_n non può essere sottogruppo dei commutatori di nessun gruppo.