1. Un *cubo olandese* è un cubo con faccie di colore rosso, bianco o blu. Poichè ogni faccia può avere uno qualunque dei tre colori, ci sono a priori $3^6 = 729$ cubi possibili. Però, tanti di questi cubi sono "lo stesso cubo" nel senso che possono essere portati uno nell'altro mediante una opportuna rotazione. Per esempio, da questo punto di vista tutti i cubi con cinque faccie rosse e una faccia bianca sono lo stesso cubo.

   Quanti cubi olandesi essenzialmente diversi ci sono? (Sugg. il gruppo delle rotazioni dello spazio che preservano un cubo è isomorfo al gruppo simmetrico S_4).

2. Un *tetraedro italiano* è un tetraedo regolare con faccie di colore verde, bianco o rosso. Quanti tetraedi italiani *essenzialmente diversi* ci sono? (Sugg. il gruppo delle rotazioni dello spazio che preservano un tetraedo regolare è isomorfo al gruppo alterno A_4)

3. In questo esercizio, le perle possono avere n colori diversi (giallo, blu, verde, ...). Sia m un numero primo. Quante collane di m perle essenzialmente diverse possiamo costruire?

4. Sia G un gruppo di ordine 33.
   (a) Dimostrare che i sottogruppi di Sylow di G sono normali.
   (b) Dimostrare che $G \cong \mathbf{Z}_{33}$. (Sugg. usare l'esercizio 3.8.)

5. Sia G un gruppo di ordine 45.
   (a) Dimostrare che i sottogruppi di Sylow di G sono normali.
   (b) Dimostrare che G è abeliano.

6. Sia G un gruppo di ordine 12.
   (a) Dimostrare che G ammette un 2-sottogruppo di Sylow normale oppure un 3-sottogruppo di Sylow normale.
   (b) Esibire esempi di gruppi di ordine 12 con 2-sottogruppi di Sylow non normali (resp. 3-sottogruppi di Sylow non normali).

7. Un gruppo G si dice *semplice* se gli unici sottogruppi normali di G sono G e $\{1\}$. Dimostrare che nessun gruppo di ordine n è semplice nei seguenti casi:
   (a) $n = 200$; (b) $n = 4p$ con $p \geq 5$ primo; (c) $n = 36$; (d) $n = 72$;
   (Sugg. usare la teoria di Sylow e l'esercizio 3.9.)

8. Sia G un gruppo di ordine 56. Dimostrare che G ammette un 2-sottogruppo di Sylow normale oppure un 7-sottogruppo di Sylow normale. (Sugg. Se i 7-sottogruppi di Sylow non sono normali, determinare la cardinalità del complemento dell'unione dei 7-sottogruppi di Sylow).

9.*Dimostrare che non esistono gruppi *semplici* non abeliani di ordine < 60. (Sugg. procedere caso per caso; usare gli esercizi 2.7, 3.9, 4.7, 4.8 e i teoremi di Sylow)