

1. Siano H ed N sottogruppi di un gruppo G . Supponiamo che N sia normale.
 - (a) Dimostrare che $HN = \{hn : h \in H \text{ e } n \in N\}$ è un sottogruppo di G .
 - (b) Dimostrare che l'inclusione $H \subset HN$ induce un isomorfismo di gruppi

$$H/(H \cap N) \cong HN/N.$$

2. Sia G un gruppo. Dimostrare che un sottogruppo normale di G è unione disgiunta di classi di coniugio di G .
3. Siano $K \subset H \subset G$ gruppi. Dimostrare che $[G : K] = [G : H][H : K]$.
4. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. È vero o falso che f manda il centro di G nel centro di H ?
6. Determinare le classi di coniugio del gruppo alterno A_4 . Verificare che la cardinalità di ogni classe divide $\#A_4 = 12$.
7. Sia p un numero primo.
 - (a) Dimostrare che il centro di un gruppo finito di ordine una potenza di p non è banale.
 - (b) Dimostrare che ogni gruppo di ordine p^2 è abeliano.
8. Sia G un gruppo e siano N_1, N_2 due sottogruppi normali di G . Dimostrare che se $N_1 \cap N_2 = \{e\}$, allora N_1 e N_2 commutano. Dimostrare che il sottogruppo $N_1N_2 = \{xy : x \in N_1 \text{ e } y \in N_2\}$ è isomorfo a $N_1 \times N_2$.
9. Sia $H \subset G$ un sottogruppo con $[G : H] = n$. Dimostrare che H contiene un sottogruppo N , normale in G , con la proprietà che $[G : N]$ divide $n!$.
10. Siano p e q due numeri primi. Dimostrare che ogni gruppo G di ordine pq ammette un sottogruppo normale diverso da G e da $\{1\}$.
11. Sia $n \geq 2$. Sia $H \subset S_n$ un sottogruppo transitivo, cioè tale che l'azione di H ha un'unica orbita su $\{1, 2, \dots, n\}$.
 - (a) Dimostrare che n divide $\#H$.
 - (b) Dimostrare che H contiene un elemento senza punti fissi. (Sugg. usare la formula di Burnside.)
12. Determinare i sottogruppi di Sylow del gruppo A_5 . Quanti sono? E com'è la loro struttura?
13. Sia p un numero primo. Esibire un p -sottogruppo di Sylow di $\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.
14. Sia p un numero primo e sia $n \geq 1$.
 - (a) Determinare l'ordine del gruppo $\text{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$.
 - (b) Esibire un p -sottogruppo di Sylow di $\text{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$.