1. Sia G un gruppo, sia $g \in G$ e sia $H \subset G$ un sottogruppo. Dimostrare che anche $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$ è un sottogruppo di G.

2. Sia X un insieme con un'azione del gruppo G. Sia $\sigma \in G$, sia $x \in X$ e sia G_x lo stabilizzatore di x. Dimostrare che lo stabilizzatore di $\sigma(x)$ è uguale a $\sigma G_x \sigma^{-1}$.

3. (a) Sia G un gruppo. Dimostrare che due elementi coniugati di G hanno lo stesso ordine. Vale anche il viceversa?
   (b) Determinare le classi di coniugio del gruppo simmetrico S_3.
   (c) Stessa domanda per il gruppo diedrale D_4.
   (d) Dimostrare che se due matrici $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ sono coniugate, allora hanno lo stesso polinomio caratteristico. Vale anche il viceversa?

4. Sia $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. La moltiplicazione per la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   permuta i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^n$. Determinare il segno di questa permutazione.

5. Sia $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Definiamo

$$\sigma(z) \;=\; \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{per } \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}).$$

   (a) Dimostrare che si tratta di un'azione di $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ su $\mathbf{H}$.
   (b) Dimostrare che l'azione è *transitiva* (c'è una sola orbita).
   (c) Determinare lo stabilizzatore di $i \in \mathbf{H}$.

6. Sia G un gruppo di ordine n. Sia $S(G)$ il gruppo delle permutazioni di G.
   (a) Dimostrare che $S(G) \cong S_n$.
   (b) Dimostrare che la *traslazione* t_g per g, data da $t_g(x) = gx$ per $x \in G$ è una permutazione di G e che la mappa $g \mapsto t_g$ definisce un'azione di G su se stesso.
   (c) (Cayley) Dimostrare che G è isomorfo ad un sottogruppo di S_n. (Sugg. usare l'azione della parte (b))

7. Sia G un gruppo finito di ordine $2n$ con n dispari. In questo esercizio dimostriamo che G ammette un sottogruppo di indice 2.
   (a) Dimostrare che G ha un elemento x di ordine 2.
   (b) Sia $g \mapsto t_g$ l'applicazione dell'esercizio 6. Calcolare il segno della permutazione t_x.
   (c) Dimostrare che $H = \{g \in G : \text{il segno di } t_g \text{ è pari}\}$ è un sottogruppo di indice 2.