1. Determinare la forma di Jordan della matrice

$$\begin{pmatrix} 2012 & 2012 & 2012 & 2012 & 2012 \\ 2012 & 2012 & 2012 & 2012 & 2012 \\ 2012 & 2012 & 2012 & 2012 & 2012 \\ 2012 & 2012 & 2012 & 2012 & 2012 \\ 2012 & 2012 & 2012 & 2012 & 2012 \end{pmatrix}.$$

2. Sia φ la funzione di Eulero. Determinare $\varphi(2012)$. Dimostrare che non esiste nessun intero $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ con $\varphi(n) = 2012$.

3. Sia R l'anello $\mathbf{Z}_{2012}$. Determinare gli elementi nilpotenti di R. Scrivere il gruppo moltiplicativo $\mathbf{Z}_{2012}^*$ come prodotto di gruppi ciclici. Di quanti punti consiste $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_{2012})$?

4. Sia G un gruppo di ordine 2012.
   (a) Dimostrare che G è isomorfo ad un prodotto semidiretto della forma $N \times_\phi H$ con $N \cong \mathbf{Z}_{503}$, con H di ordine 4 e con ϕ un omomorfismo $H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$.
   (b) Determinare i gruppi G di ordine 2012 (ci sono quattro possibilità a meno di isomorfismo).

5. Determinare gli elementi invertibili del sottoanello di $\mathbf{Q}$ dato da

$$\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] = \{\frac{k}{2^m} \in \mathbf{Q} : \ k \in \mathbf{Z} \text{ e } m \geq 0\}.$$

   Dimostrare che l'ideale di $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ generato da 2012 è massimale.

6. Sia

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_5).$$

   (a) Dimostrare che il sottogruppo H generato da M ha ordine 20.
   (b) Dimostrare che H è uguale al suo centralizzante.
   (c) Determinare $[N : H]$ dove N è il normalizzante di H in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_5)$.

7. Dire se il polinomio $2X^3 + X + 2$ è un elemento irriducibile degli anelli $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$, $\mathbf{Z}_2[X]$ e $\mathbf{Z}_3[X]$.

8. Dimostrare che la quadratura del triangolo equilaterale è possibile. In altre parole, dato un triangolo laterale di area A, è possibile costruire con riga e compasso un quadrato di area A.

9. I punti $P_k = e^{\frac{2\pi i k}{7}} \in \mathbf{C}$ formano per $k = 0, 1, \ldots, 6$ i vertici di un ettagono regolare. Si sa che i punti P_k non sono costruibili con riga e compasso da 0 e 1. Dimostrare che invece il baricentro del triangolo con vertici P_1, P_2 e P_4 è costruibile.

10. Sia F un campo e sia $f \in F[X]$ un polinomio monico di grado $n \geq 1$. Dimostrare che esiste un campo K contenente F con le seguenti proprietà: il grado $[K : F]$ è al più $n!$ e il polinomio f si scrive come $f(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ per certi $\alpha_i \in K$.