1. Calcolare i gradi
   (a) $[\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbf{Q}]$;
   (b) $[\mathbf{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbf{Q}]$;
   (c) $[\mathbf{Q}(\exp(\frac{2\pi i}{p})) : \mathbf{Q}]$, per p un numero primo.

2. Sia $f : K \longrightarrow L$ un omomorfismo di campi. Dimostrare che $\operatorname{car} K = \operatorname{car} L$.

3. Sia K un campo e sia $f : K \longrightarrow K$ un automorfismo di campi. Dimostrare che la restrizione di f al sottocampo primo (il sottocampo più piccolo) di K, è l'identità.

4. Sia $K \subset L$ un'inclusione di campi. Sia $\alpha \in L$. Dimostrare che α è algebrico su K se e solo se il grado $[K(\alpha) : K]$ è finito. (Sugg. Considerare gli elementi $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$ in $K(\alpha)$).

5. Sia $K \subset L$ un'inclusione di campi.
   (a) Dimostrare che se $\alpha, \beta \in L$ sono algebrici su K, anche $\alpha + \beta$ e $\alpha\beta$ lo sono.
   (b) Dimostrare che $\{\alpha \in L : \alpha \text{ è algebrico su } K\}$ è un sottocampo di L che contiene K.

6. (a) Esibire $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ trascendenti, tali che la somma $\alpha + \beta$ sia algebrica.
   (b) Esibire $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ trascendenti, tali che il prodotto $\alpha\beta$ sia algebrico.
   (b) Esistono $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ trascendenti, tali che sia $\alpha + \beta$ che $\alpha\beta$ siano algebrici?

7. Sia K un campo finito. Dimostrare che $\operatorname{car}(K) = p$ per qualche numero primo p. Dimostrare $\#K$ è una potenza di un numero primo.

8. Dimostrare che i sottocampi $\mathbf{Q}(\pi)$ e $\mathbf{Q}(e)$ di $\mathbf{C}$ sono isomorfi (Sugg. π e e sono numeri trascendenti).

9. Dimostrare che non è possibile costruire con riga e compasso un angolo di 1 grado.

10. Calcolare i gradi su $\mathbf{Q}$ dei campi $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ e $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

11. Sia $K \subset L$ un'estensione di grado $[L : K]$ dispari. Sia $\alpha \in L$. Dimostrare che $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

12. Sia $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}} \in \mathbf{C}$.
    (a) Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di ζ.
    (b) Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di $\zeta + \zeta^{-1}$ (Sugg. il polinomio ha grado 3).
    (c) Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di $\eta = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ (Sugg. calcolare $\eta + \eta'$ e $\eta\eta'$ dove $\eta' = \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^6$).

13. Dimostrare che il campo $\overline{\mathbf{Q}}$ dei numeri algebrici in $\mathbf{C}$ è numerabile. Dimostrare che il grado $[\overline{\mathbf{Q}} : \mathbf{Q}]$ è infinito.

14. Sia K un campo di caratteristica $p > 0$.
    (a) Dimostrare che $K^p = \{x^p : x \in K\}$ è un sottocampo di K.
    (b) Per $K = \mathbf{Z}_p$ calcolare il grado $[K : K^p]$.
    (c) Stessa domanda per $K = \mathbf{Z}_p(X)$.