Algebra 2. 12. Gruppi abeliani finiti, $\mathbf{Z}_n^*$, forma di Jordan. Roma, 11 dicembre 2011

1. Scrivere i gruppi $\mathbf{Z}_{120}^*$ e $\mathbf{Z}_{10!}^*$ come prodotto di gruppi ciclici.
2. Per gli anelli finiti $R = \mathbf{Z}_{91}$, $\mathbf{Z}_{100}$, $\mathbf{Z}[i]/(9-2i)$ e $\mathbf{Z}_3[X]/(X^4-1)$, scrivere il gruppo moltiplicativo $R^*$ come prodotto di gruppi ciclici.
3. Dimostrare che l'applicazione naturale $\mathbf{Z}_{2n}^* \longrightarrow \mathbf{Z}_n^*$ è un isomorfismo di gruppi se e solo se $n$ è dispari.
4. Sia $p$ un primo congruo a 1 (mod 4). Dimostrare che il gruppo $(\mathbf{Z}[i]/(p^n))^*$ è isomorfo al prodotto di $\mathbf{Z}_{(p-1)p^{n-1}}$ con se stesso. Determinare la struttura del gruppo $(\mathbf{Z}[i]/(8))^*$.
5. Sia $A$ un gruppo abeliano finito.
   (a) Dimostrare che $A$ è ciclico se e solo se per ogni primo $p$ il sottogruppo $A[p] = \{a \in A : pa = 0\}$ è ciclico.
   (b) Dimostrare che $A$ è ciclico se e solo se per ogni primo $p$ il gruppo quoziente $A/pA$ è ciclico.
6. Sia $p$ un numero primo. Quanti gruppi abeliani di ordine $p^3$ ci sono? Quanti di ordine $p^5$?
7. Siano $A$ e $B$ due gruppi commutativi finiti con la proprietà che
$$\#\{a \in A : \mathrm{ord}(a) = k\} \;=\; \#\{b \in B : \mathrm{ord}(b) = k\}, \qquad \text{per ogni } k \geq 1.$$
   Dimostrare che $A \cong B$.
8. Sia $k$ un campo. Per i seguenti $k[X]$-moduli, determinare una matrice rappresentativa per la moltiplicazione per $X$:
   (a) $k[X]/(X^4)$;
   (b) $k[X]/(X^2) \times k[X]/(X^2)$;
   (c) $k[X]/(X) \times k[X]/(X+1) \times k[X]/(X+2) \times k[X]/(X+3)$.
9. Scrivere la matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 9 & 2 & -10 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
   nella forma normale di Jordan.
10. Determinare la forma normale di Jordan della tavola pitagorica
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 3 & 6 & 8 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54 & 60 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 & 70 \\ 8 & 16 & 24 & 32 & 40 & 48 & 56 & 64 & 72 & 80 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 & 90 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \end{pmatrix}.$$