

1. Per un anello commutativo R , sia $\text{Spec}(R)$ la collezione degli ideali primi di R . Per ogni ideale $I \subset R$, sia $Z(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) : I \subset \mathfrak{p}\}$. Dimostrare che gli insiemi $Z(I)$ sono i sottoinsiemi *chiusi* di una topologia su $\text{Spec}(R)$. Questa è la topologia di Zariski di $\text{Spec}(R)$.
2. Sia R un anello e sia $I \subset R$ un ideale.
 - (a) Dimostrare che $Z(I) = \emptyset$ se e solo se $I = R$.
 - (b) Dimostrare che $Z(I) = \text{Spec}(R)$ se e solo se $I \subset N$ dove N è l'ideale dato da $N = \{x \in R : x^n = 0 \text{ per un certo } n \geq 1\}$ (Sugg. usare l'esercizio 9 del foglio 10).
3. Sia F un campo. Dimostrare che $\text{Spec}(F)$ consiste di un solo punto.
4. Sia $n \geq 1$. Dimostrare che $\text{Spec}(\mathbf{Z}_n)$ è finito e che la topologia di Zariski è quella discreta.
5. Sia R un dominio. Dimostrare che l'ideale $\{0\}$ è primo. Dimostrare che $\{0\}$ è un punto denso di $\text{Spec}(R)$.
6. Dimostrare che per ogni anello R lo spazio $\text{Spec}(R)$ è compatto.
7. Sia R un anello. Dimostrare che $\mathfrak{p}$ è un punto chiuso di $\text{Spec}(R)$ se e solo se $\mathfrak{p}$ è un ideale massimale.
8. Dimostrare che i chiusi di $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ sono $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ e i sottoinsiemi finiti di $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ che non contengono l'ideale (0) .
9. Sia k un campo. Dimostrare che i chiusi di $\text{Spec}(k[X])$ sono $\text{Spec}(k[X])$ e i sottoinsiemi finiti di $\text{Spec}(k[X])$ che non contengono l'ideale (0) .
10. Sia k un campo e sia $k[[X]]$ l'anello delle serie di potenze con coefficienti in k . Dimostrare che $\text{Spec}(k[[X]])$ consiste di due punti. Determinare la topologia di Zariski.
11. Sia R un anello e sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di R . Dimostrare che la chiusura $\overline{\{\mathfrak{p}\}}$ di $\mathfrak{p}$ nella topologia di Zariski è l'insieme degli ideali primi di R che contengono $\mathfrak{p}$.
12. Sia $f : R \rightarrow R'$ un omomorfismo di anelli commutativi. Dimostrare che la mappa $F : \text{Spec}(R') \rightarrow \text{Spec}(R)$ data da $F(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p})$ è continua per la topologia di Zariski.
13. Siano R_1, R_2 due anelli. Per $i = 1, 2$ sia $\pi_i : R_1 \times R_2 \rightarrow R_i$ la proiezione su R_i e sia $p_i : \text{Spec}(R_i) \rightarrow \text{Spec}(R_1 \times R_2)$ l'applicazione indotta (quella dell'Eserc. 12.).
 - (a) Dimostrare che l'applicazione

$$\text{Spec}(R_1) \cup \text{Spec}(R_2) \rightarrow \text{Spec}(R_1 \times R_2)$$

indotta da p_1 e p_2 , è un omeomorfismo.

- (b) Dimostrare che se R_1 e R_2 sono diversi dell'anello zero, allora $\text{Spec}(R_1 \times R_2)$ è sconesso.