1. Dire se i seguenti ideali degli anelli $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ e $\mathbf{Z}_3[X]$ sono primi o meno:

$$(X^3 - 18X + 12), \quad (X^3 - 18X + 12, 5), \quad (X^3 - 18X + 12, X - 1).$$

(Sono richieste quindi $3 \times 3 = 9$ risposte . . .)

2. Sia R un anello commutativo. Dimostrare che (0) è ideale primo di R se e solo se R è un dominio.
3. Dimostrare che ogni dominio finito è un campo. Dedurre che gli ideali primi non nulli di $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ sono massimali.
4. Un *anello locale* è un anello commutativo che possiede un unico ideale massimale.
- (a) Dimostrare che R è un anello locale se e solo se $R - R^*$ è un ideale di R .
Sia p un numero primo.
- (b) Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ l'anello $\mathbf{Z}/p^n$ è locale.
- (c) Dimostrare che l'anello $R = \{\frac{s}{t} \in \mathbf{Q} : s, t \in \mathbf{Z} \text{ con } t \not\equiv 0 \pmod{p}\}$ è un anello locale.
- (d) Dimostrare che l'anello $\mathbf{Z}_p[[X]]$ delle serie di potenze con coefficienti in $\mathbf{Z}_p$ è locale.
5. Sia $R = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ è continua}\}$.
- (a) Dimostrare che R è un anello (con $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.)
- (b) Per ogni $x \in [0, 1]$ sia $M_x = \{f \in R : f(x) = 0\}$. Dimostrare che M_x è un ideale massimale di R .
- (c) Dimostrare che ogni ideale massimale di R è uguale a M_x , per un certo $x \in [0, 1]$. (Sugg. Usare la compattezza dell'intervallo chiuso $[0, 1]$.)
6. Siano R, R' due anelli commutativi e sia $f : R \rightarrow R'$ un omomorfismo di anelli.
- (a) Dimostrare: se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di R' allora $f^{-1}(\mathfrak{p})$ è ideale primo di R .
- (b) È vero o falso? “se $\mathfrak{p}$ è ideale primo di R allora $f(\mathfrak{p})$ è ideale primo di R' .”
- (c) È vero o falso? “se $\mathfrak{p}$ è ideale primo di R allora $f(\mathfrak{p})$ è ideale primo dell'anello $f(R)$.”
7. Sia $f : R_1 \rightarrow R_2$ un omomorfismo di anelli commutativi. Sia $I \subset R_2$ un ideale massimale. È vero che $f^{-1}(I)$ è un ideale massimale di R_1 ?
8. Sia R un anello.
- (a) Dimostrare che gli elementi nilpotenti di R formano un ideale N di R .
- (b) Dimostrare che $N \subset \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ dove $\mathfrak{p}$ varia fra gli ideali primi di R . Nel prossimo esercizio dimostriamo l'inclusione opposta.
9. Siano R e N come sopra e sia $x \in R - N$. Sia Ω l'insieme degli ideali I di R che hanno la proprietà che $x^n \notin I$ per nessun $n \geq 1$.
- (a) Dimostrare che $\Omega \neq \emptyset$.
- (b) Dimostrare che ogni catena in Ω ha un estremo superiore in Ω (l'ordinamento di Ω è dato dall'inclusione).
- (c) Per il Lemma di Zorn esiste un elemento massimale $M \in \Omega$. Dimostrare che M è un ideale primo di R .
- (d) Dimostrare che $\bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} \subset N$
10. Sia $R \neq \{0\}$ un anello. In questo esercizio dimostriamo che R ammette ideali primi *minimali*.
- (a) Siano $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \mathfrak{p}_3 \supset \dots$ ideali primi di R . Dimostrare che $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{p}_n$ è anche primo.
- (b) Dimostrare che l'ordinamento su $\Omega = \text{Spec}(R)$ dato da $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$ se e solo se $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$ è un ordinamento parziale e che ogni catena in Ω ha un estremo superiore in Ω .
- (c) Usare il lemma di Zorn e dimostrare che R ammette ideali primi minimali.