1. Sia G un gruppo. Dimostrare che il centro $Z(G)$ e il sottogruppo dei commutatori G' sono sottogruppi caratteristici di G.

2. Sia G un gruppo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale di cardinalità 2. Dimostrare che N è contenuto nel centro di G.

3. Sia G un gruppo e sia $\mathrm{Inn}(G)$ il gruppo degli automorfismi interni di G. Dimostrare che $\mathrm{Inn}(G)$ è un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}(G)$.

4. Siano $N \subset H \subset G$ sottogruppi.
   (a) Dimostrare che se H è normale in G ed N è un sottogruppo caratteristico di H, allora N è un sottogruppo normale di G.
   (b) Esibire un esempio dove N è normale in H ed H è normale in G, ma N *non* è normale in G. (Sugg. prendere $G = D_4$)

5. Sia G un gruppo e sia $f : G \longrightarrow G$ la biiezione data da $f(x) = x^{-1}$ per $x \in G$. Dimostrare che G è abeliano se e solo se f è un automorfismo di G.

6. Sia G un gruppo finito con la proprietà che $\mathrm{Aut}(G)$ è banale.
   (a) Dimostrare che G è abeliano;
   (b) Dimostrare che ogni elemento di G ha ordine ≤ 2;
   (c) Dimostrare che $\#G = 1$ oppure 2.

7. Sia k un campo e sia $\mathrm{GL}_n(k)$ il gruppo moltiplicativo delle matrici invertibili con coefficienti in k.
   (a) Dimostrare che il determinante è un omomorfismo suriettivo $\mathrm{GL}_n(k) \longrightarrow k^*$. Il nucleo è indicato da $\mathrm{SL}_n(k)$.
   (b) Dimostrare che le matrici scalari formano un sottogruppo normale N di $\mathrm{GL}_n(k)$. Il quoziente è indicato da $\mathrm{PGL}_n(k)$.
   (c) Dimostrare che l'intersezione del sottogruppo normale N con $\mathrm{SL}_n(k)$ è un sottogruppo normale di $\mathrm{SL}_n(k)$. Il quoziente è indicato da $\mathrm{PSL}_n(k)$.

8. Sia p un primo e sia $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Determinare gli ordini dei gruppi $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}_p)$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbf{Z}_p)$ e $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{Z}_p)$.

9. Sia G un gruppo finito e sia p il più piccolo divisore primo di $\#G$. Sia $H \subset G$ un sottogruppo di indice p. In questo esercizio dimostriamo che H è un sottogruppo normale.
   (a) La moltiplicazione a sinistra per $g \in G$ induce una permutazione delle classi laterali sinistre di H. Dimostrare che la mappa indotta $G \longrightarrow S_p$ è un omomorfismo di gruppi.
   (b) Dimostrare che l'immagine di f ha ordine p.
   (c) Dimostrare che $\ker(f) = H$ e dedurne che H è un sottogruppo normale di G.

10. Sia G un gruppo finito che ha la proprietà che il suo sottogruppo dei commutatori G' è contenuto nel centro $Z(G)$ di G.
    (a) Verificare che il gruppo diedrale D_4 e il gruppo Q dei quaternioni hanno questa proprietà.
    (b) Sia $g \in G$. Dimostrare che la mappa $G \longrightarrow G$ data da $x \mapsto [x, g]$ è un omomorfismo.
    (c) Dimostrare che se la cardinalità di $Z(G)$ è coprima all'indice $[G : Z(G)]$, allora G è abeliano.