

COGNOME

NOME

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Dimostrare che un gruppo G di cardinalità 72 non può essere semplice.
2. Sia R un anello commutativo. Un elemento $x \in R$ si dice *nilpotente* se

$$x^N = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{N \text{ volte}} = 0 \quad \text{per un certo } N > 0.$$

Dimostrare che gli elementi nilpotenti formano un ideale di R .

3. Sia H il sottogruppo di S_4 generato dalla permutazione $(1\,2\,3\,4)$. Determinare le orbite della azione tramite coniugio di H sul sottogruppo normale A_4 di S_4 .
4. Sia N il sottogruppo di $\mathbf{C}^*$ generato da i . Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{C}^*/N$ è isomorfo a $\mathbf{C}^*$.
5. Determinare la cardinalità del gruppo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbf{Z}[X]/(3, X^4 - 1)$.
6. Sia k un campo di spezzamento di $X^2 - 2$ su $\mathbf{Z}_5$.
 - (a) Quanti elementi ha il gruppo quoziente $k^*/\mathbf{Z}_5^*$?
 - (b) Sia $z \in k$ uno zero di $X^2 - 2$. Dimostrare che $z + 1 \in k^*$.
 - (c) Determinare l'ordine della classe laterale di $z + 1$ nel gruppo $k^*/\mathbf{Z}_5^*$.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 7 (d) del foglio 4.
2. Questo è l'esercizio 12 (c) del foglio 7.
3. Le orbite dell'azione di H sono $\{(1)\}$, $\{(1\,3)(2\,4)\}$, $\{(1\,2)(3\,4), (1\,4)(2\,3)\}$, $\{(1\,2\,3), (2\,3\,4), (3\,4\,1), (4\,1\,2)\}$ e $\{(1\,3\,2), (2\,4\,3), (3\,1\,4), (4\,2\,1)\}$.
4. Si tratta di una variazione dell'esercizio 3 del 3° appello. Questa volta va applicato il Teorema dell'isomorfismo all'omomorfismo suriettivo $\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*$ dato da $z \mapsto z^4$.
5. L'anello $\mathbf{Z}[X]/(3, X^4 - 1)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_3[X]/(X^4 - 1)$. La fattorizzazione del polinomio $X^4 - 1$ in $\mathbf{Z}_3[X]$ in fattori irriducibili è data da $(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$. Per il Teorema cinese del resto l'anello $\mathbf{Z}_3[X]/(X^4 - 1)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_3[X]/(X - 1) \times \mathbf{Z}_3[X]/(X + 1) \times \mathbf{Z}_3[X]/(X^2 + 1)$. I tre fattori sono campi finiti di rispettivamente 3, 3 e 9 elementi. Il numero di elementi invertibili è quindi dato da $(3 - 1) \cdot (3 - 1) \cdot (9 - 1) = 32$.
6. Poiché $X^2 - 2$ è irriducibile in $\mathbf{Z}_5[X]$, il suo campo di spezzamento ha $5^2 = 25$ elementi. Il gruppo $k^*/\mathbf{Z}_5^*$ ha quindi $(25 - 1)/(5 - 1) = 6$ elementi. Il fatto che -1 non è uno zero di $X^2 - 2$ implica che $z + 1$ non è zero ad appartiene quindi a k^* .
 L'ordine della classe laterale di $z + 1$ è un divisore di 6. Abbiamo che $(z + 1)^2 = z^2 + 2z + 1 = 3 + 2z$ e $(z + 1)^3 = (z + 1)(3 + 2z) = 3 + 2z^2 = 2$ in k^* . Dal fatto che $(z + 1)^3$ sta in $\mathbf{Z}_5^*$, ma gli elementi $z + 1$ e $(z + 1)^2$ no, segue che l'ordine della classe laterale di $z + 1$ nel gruppo quoziente $k^*/\mathbf{Z}_5^*$ è 3.